Aufgabe 1 (*kovariante Ableitung längs Kurven*)
Für $\xi, \eta \in C^1(I, \mathbb{R}^2)$ und $\varphi \in C^1(I)$ erfüllt die kovariante Ableitung längs $c : I \to U$ bzgl. g folgende Rechenregeln:

(1) $\dfrac{\nabla(\lambda\xi + \mu\eta)}{dt} = \lambda\dfrac{\nabla\xi}{dt} + \mu\dfrac{\nabla\eta}{dt}$.

(2) $\dfrac{\nabla(\varphi\xi)}{dt} = \varphi\dfrac{\nabla\xi}{dt} + \varphi'\xi$.

(3) $g(\xi,\eta)' = g\Big(\dfrac{\nabla\xi}{dt}, \eta\Big) + g\Big(\xi, \dfrac{\nabla\eta}{dt}\Big)$.

Aufgabe 2 (*Parallelverschiebung*)
Sei $c : (-1, 2) \to \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$, $c(t) = (r(t), h(t))$, eine reguläre nach der Bogenlänge parametrisierte C^2-Kurve. Betrachten Sie die Rotationsfläche

$$F(t,\varphi) = \begin{pmatrix} r(t)\cos\varphi \\ r(t)\sin\varphi \\ h(t) \end{pmatrix},$$

mit der induzierten Metrik (vgl. Beispiel 6.3)

$$G(t,\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r(t)^2 \end{pmatrix}.$$

(a) Es sei für festes $\varphi_0 \in \mathbb{R}$, $t_0 \in [0, 1]$ die Kurve $\gamma_{\varphi_0} : [0, t_0] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\gamma_{\varphi_0}(t) = (t, \varphi_0)$ und $\sigma_{t_0} : [0, \varphi_0] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $\sigma_{t_0}(\varphi) := (t_0, \varphi)$. Bestimmen Sie die Parallelverschiebungen $P_{\gamma_{\varphi_0}}, P_{\sigma_{t_0}}$ in Abhängigkeit von t_0, φ_0.

(b) Berechnen Sie die Bilder $DF(P_{\gamma_{\varphi_0}}(v)), DF(P_{\sigma_{t_0}}(v))$ für $v \in \mathbb{R}^2$ in Abhängigkeit von t_0, φ_0. Interpretieren Sie das Ergebnis für verschiedene t_0,φ_0 geometrisch.

Aufgabe 3 (*Codazzi-Mainardi bei konformer Parametrisierung*)
Sei $F \in C^3(U, \mathbb{R}^3)$ konform parametrisiert, also $g_{ij} = e^{2u}\delta_{ij}$ (vgl. Beispiel 9.1). Zeigen Sie mit den Gleichungen von Codazzi-Mainardi

$$\begin{aligned} \partial_2 h_{11} - \partial_1 h_{12} &= (\partial_2 u)\,(h_{11} + h_{22}) \\ \partial_2 h_{12} - \partial_1 h_{22} &= -(\partial_1 u)\,(h_{11} + h_{22}). \end{aligned}$$

Verifizieren Sie $\partial_\alpha(h_{11} + h_{22}) = e^{2u}\partial_\alpha H + 2(\partial_\alpha u)(h_{11} + h_{22})$, und folgern Sie

$$\begin{aligned} \partial_1(h_{11} - h_{22}) + 2\,\partial_2 h_{12} &= e^{2u}\partial_1 H, \\ \partial_2(h_{11} - h_{22}) - 2\,\partial_1 h_{12} &= -e^{2u}\partial_2 H. \end{aligned}$$

Anmerkung: Im Fall H konstant ist also $h_{11} - h_{22} - 2i\,h_{12}$ holomorph.

Abgabe Dienstag, 13.7.2021 im ILIAS-Abgabetool Ihres Tutorates