Aufgabe 1 (*Kettenlinie*)

(a) Parametrisieren Sie die Kurve $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(x) = (x, a\cosh\frac{x}{a})$, nach der Bogenlänge.

(b) Es sei $u \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ eine Funktion und $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $c(x) = (x, u(x))$. Zeigen Sie: $\varkappa(x) = \frac{|u''(x)|}{(1+u'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Krümmung von der Kurve aus Teilaufgabe (a).

Aufgabe 2 (*Elastische Energie von Kurven*)
Sei $c \in C^2([0, L], \mathbb{R}^n)$ mit $|c'| = 1$. Zeigen Sie: ist c C^1-geschlossen so folgt

$$E(c) := \int_0^L |\vec{\varkappa}|^2 \, ds \geq \frac{4\pi^2}{L},$$

und diskutieren Sie den Gleichheitsfall.

Hinweis. Begründen Sie im Gleichheitsfall zunächst, dass Sie nur den Fall $L = 2\pi$ betrachten müssen. Machen Sie im Fall $L = 2\pi$ einen Fourierreihenansatz, für a_k, $b_k \in \mathbb{R}^n$,

$$c'(s) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos ks + b_k \sin ks).$$

Aufgabe 3 (*Differentiation von bilinearen Abbildungen*)
Seien U, V, W endlich-dimensionale Vektorräume, $B : U \times V \to W$ eine bilineare Abbildung und $I = (a, b)$. Zeigen Sie: mit $x \in C^1(I, U)$, $y \in C^1(I, V)$ ist auch $B(x, y) \in C^1(I, W)$, und es gilt die Produktregel

$$B(x, y)' = B(x', y) + B(x, y').$$

Hinweis. Verwenden Sie Koordinatendarstellungen bzgl. Basen von U, V, W. Wir werden im Laufe der Vorlesung diese Aussgae häufig für $U = V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}$ und $B = \langle \cdot, \cdot \rangle$, das euklidische Skalarprodukt, verwenden.

Abgabe Dienstag, 11.05.2021 im ILIAS-Abgabetool Ihres Tutorates