

Aufgabe 1 (*Umlaufzahl und Rotationsindex*)

Sei $C_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ und $C_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 3| = 2\}$. Bestimmen Sie eine nach der Bogenlänge parametrisierte C^1 -Kurve $c : [0, L] \rightarrow C_1 \cup C_2$ mit $c(0) = 1$ und $c'(0) = i$, die erst C_1 und dann C_2 genau einmal durchläuft. Berechnen Sie die Umlaufzahlen $n(c, z)$, $z \notin C_1 \cup C_2$, sowie $n(c', 0)$.

Hinweis: Für die Aufgabe ist Kenntnis von Folgerung 3.1 und Beispiel 3.3 aus Woche 5 hilfreich. Um diese zu erwerben, ist es ratsam, das Vorlesungsvideo zu Vorlesung 7 (Woche 5) bis Minute 23 zu schauen. Diese Resultate dürfen auch bei der Lösung von Ihnen (zusätzlich zum Stoff der Woche 4) verwendet werden.

Aufgabe 2 (*Maxima der Krümmung*)

Sei $c : I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine reguläre C^2 -Kurve, und $|c(t)|$ habe in $t_0 \in I$ ein lokales Maximum. Zeigen Sie

$$\kappa(t_0) \geq \frac{1}{|c(t_0)|}.$$

Hinweis: Nehmen Sie zunächst an, dass c nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

Aufgabe 3 (*Homotopieklassen*)

Zeigen Sie dass zwei geschlossene, stückweise C^1 -Kurven $\gamma_{0,1} : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ genau dann in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ homotop sind, wenn $n(\gamma_0, 0) = n(\gamma_1, 0)$.

Abgabe Dienstag, 18.05.2021 im ILIAS-Abgabetooll Ihres Tutorates