
Aufgabe 1 (*Tangentenflächen*)
Sei $\gamma \in C^2(I, \mathbb{R}^3)$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Dann heißt $F : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $F(s,t) = \gamma(s) + t\gamma'(s)$, Tangentenfläche. Überlegen Sie, unter welchen Voraussetzungen F eine Immersion ist und berechnen Sie die erste Fundamentalform.

Aufgabe 2 (*Konforme Parametrisierung von Rotationsflächen*)
Sei $\gamma(t) = (r(t), h(t))$, $t \in I$, eine reguläre C^1-Kurve mit $r(t) > 0$ für alle t. Zeigen Sie durch geeignete Umparametrisierung von γ, dass die erzeugte Rotationsfläche konform (winkeltreu) parametrisiert werden kann.

Aufgabe 3 (*Röhrenflächen*)
Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte C^2-Kurve.

(a*) Zeigen Sie: es gibt $v_1, v_2 \in C^1(I, \mathbb{R}^3)$, so dass γ', v_1, v_2 Orthonormalbasis ist mit $v_i' = \lambda_i \gamma'$ für Funktionen $\lambda_i \in C^0(I, \mathbb{R})$, $i = 1, 2$.

Hinweis: Diese Aufgabe ist eine Bonusaufgabe. Um sie zu lösen, dürfen auch aus anderen Vorlesungen bekannte Tatsachen verwendet werden. In Teil (b) darf die Aussage ohne Beweis benutzt werden.

(b) Betrachten Sie für $r > 0$ die Röhrenfläche

$$F \in C^1(I \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^3),\; F(s,\theta) = \gamma(s) + r\big(\cos(\theta) v_1(s) + \sin(\theta) v_2(s)\big).$$

Zeigen Sie, dass F unter der Bedingung $r \max_{s \in I} \varkappa(s) < 1$ eine Immersion ist, und dass sich die Parameterlinien $s \mapsto F(s, \theta_0)$ und $\theta \mapsto F(s_0, \theta)$ in jedem $(s_0, \theta_0) \in I \times \mathbb{R}$ senkrecht schneiden.

Abgabe Dienstag, 08.06.2021 im ILIAS-Abgabetool Ihres Tutorates