

Aufgabe 1 (*Enneper-Fläche*)¹ Sei $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Ennepersche Fläche:

$$X(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right).$$

- (a) Berechnen Sie die erste und zweite Fundamentalform sowie die Weingartenabbildung und zeigen Sie, dass die mittlere Krümmung $H \equiv 0$ ist.
- (b) Für $R > 0$ und $(u, v) = u + iv = w \in \mathbb{C}$ definieren wir $X_R(w) := R^{-3} X(Rw)$. Zeigen Sie

$$\lim_{R \rightarrow \infty} X_R(w) = -\frac{1}{3} \bar{w}^3 \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \times \{0\}.$$

Aufgabe 2 (*Die Scherk-Fläche*)

Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion

$$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \log(\cos x) - \log(\cos y)$$

eine Minimalfläche ist. Bestimmen Sie den Abschluss der Fläche, als Menge im \mathbb{R}^3 .

Aufgabe 3 (*Das Möbiusband*)

- (a) Berechnen Sie erste und zweite Fundamentalform sowie die mittlere und Gaußsche Krümmung für die Fläche $F : \mathbb{R} \times (-1/2, 1/2) \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$F(s, t) = (\cos s, \sin s, 0) + t \left(\cos \frac{s}{2} (\cos s, \sin s, 0) + \sin \frac{s}{2} (0, 0, 1) \right).$$

- (b) Zeigen Sie für alle $(s, t) \in \mathbb{R} \times (-1/2, 1/2)$, dass $F(s, t) = F(s + 2\pi, -t)$. Fertigen Sie eine (grobe) Zeichnung oder ein Papiermodell an. Zeichnen sie speziell die Kurven $s \mapsto F(s, 0)$ und $s \mapsto F(s, \pm \frac{1}{4})$ ein.

Abgabe Dienstag, 22.06.2021 im ILIAS-Abgabetooll Ihres Tutorates

¹<https://minimal.sitehost.iu.edu/maze/classical.html>