Thema dieses Zettels ist der sogenannte *Hauptsatz für Raumkurven*. Dieser beantwortet für Raumkurven die Frage, welche geometrischen Invarianten die Kurve bestimmen. Z.B.: Ist eine Raumkurve durch ihre Krümmung eindeutig bestimmt?

Aufgabe 1 (*begleitende Orthonormalbasen*)
Zeigen Sie: für $v_1, \dots, v_n \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ und $t_0 \in I$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ *für* $1 \le i, j \le n$.

(2) *Es gibt Funktionen $a_{ij} \in C^0(I)$ mit $a_{ji} = -a_{ij}$, so dass gilt:*

$$v_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j \quad \text{für } i = 1, \dots, n \qquad \text{und} \qquad \langle v_i(t_0), v_j(t_0) \rangle = \delta_{ij}.$$

Hinweis. *Für (2)⇒(1) betrachte $g_{ij} := \langle v_i, v_j \rangle$.*

Definition 1 *Eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $c \in C^2(I, \mathbb{R}^3)$ heißt* Frenetkurve*, falls $\varkappa(s) \neq 0$ für alle $s \in I$. Das* Frenet-Dreibein *T, N, B von c ist*

$$\begin{aligned} T &= c' \quad \text{(Tangentenvektor)} \\ N &= \frac{c''}{|c''|} \quad \text{(Hauptnormalenvektor)} \\ B &= T \times N \quad \text{(Binormalenvektor)} \end{aligned}$$

Definition 2 *Sei $c \in C^3(I, \mathbb{R}^3)$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Frenetkurve. Die* Torsion *von c ist die Funktion*

$$\tau : I \to \mathbb{R}, \quad \tau(s) = \langle N'(s), B(s) \rangle,$$

wobei T, N, B das Frenet-Dreibein von c ist.

Aufgabe 2(*Frenetgleichungen*)

(a) Sei $c \in C^3(I, \mathbb{R}^3)$ nach der Bogenlänge parametrisierte Frenetkurve mit Frenet-Dreibein T, N, B. Zeigen Sie:

$$\begin{array}{rcrcrcr} T' &=& 0 &+& \varkappa N &+& 0 \\ N' &=& -\varkappa T &+& 0 &+& \tau B \\ B' &=& 0 &-& \tau N &+& 0 \end{array}$$

(b) Zeigen Sie: Ist $c \in C^3(I; \mathbb{R}^3)$ Frenetkurve und $\tau = 0$, so liegt c in einer Ebene.

Aufgabe 3(*Hauptsatz für Raumkurven*)
Seien $k \in C^1(I), k > 0$, und $\omega \in C^0(I)$ gegebene Funktionen auf $I = [a, b]$. Zeigen Sie: Es gibt eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $c \in C^3(I, \mathbb{R}^3)$ mit Krümmung $\varkappa = k$ und Torsion $\tau = \omega$. Die Kurve c ist eindeutig bestimmt bis auf Euklidische Bewegung.

Abgabe Dienstag, 29.6.2021 im ILIAS-Abgabetool Ihres Tutorates