Aufgabe 1 (*Eigenschaften der kovarianten Ableitung*)
Für $\xi, \eta \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$ und $\varphi \in C^1(U)$ erfüllt die kovariante Ableitung folgende Rechenregeln:

(1) $\nabla_{\varphi\xi}\eta = \varphi \nabla_\xi \eta$.

(2) $\nabla_\xi(\varphi\eta) = \varphi\nabla_\xi\eta + (\partial_\xi\varphi)\eta$.

Aufgabe 2 (*Verbiegung des Helikoids/Katenoids*)
Betrachten Sie für $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ folgende Schar von Flächen:

$$F_\alpha(u,v) = \sin\alpha \begin{pmatrix} \cosh u \cos v \\ \cosh u \sin v \\ u \end{pmatrix} + \cos\alpha \begin{pmatrix} \sinh u \sin v \\ -\sinh u \cos v \\ v \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass bis auf Umparametrisierung und Euklidische Bewegungen gilt: F_0 ist das Helikoid (s. Beispiel 7.3), $F_{\pi/2}$ das Katenoid (s. Beispiel 8.1).

(b) Zeigen Sie: Alle F_α haben dieselbe erste Fundamentalform.

(c) Zeigen Sie: Alle F_α sind Minimalflächen.

Aufgabe 3 (*günstige Koordinaten*)
Es sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $0 \in U$ und $\widetilde{F} \in C^2(U;\mathbb{R}^3)$ eine Immersion mit erster Fundamentalform $\widetilde{g}$ mit $\widetilde{g}_{ij}(0) = \delta_{ij}$. Bestimmen Sie in einer geeigneten Umgebung von 0 einen lokalen Diffeomorphismus der Form

$$\phi(x) = x + \frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{n} C_{ij}^k x^i x^j e_k \quad \text{mit } C_{ij}^k = C_{ji}^k,$$

so dass für $F = \widetilde{F} \circ \phi$ gilt:

$$g_{ij}(0) = \delta_{ij} \quad \text{und} \quad \partial_i g_{jk}(0) = 0 \quad \text{für alle } i,j,k = 1,\dots,n.$$

Anmerkungen:
(i) Die Bedingung $\widetilde{g}_{ij}(0) = \delta_{ij}$ lässt sich durch Umparametrisierung immer arrangieren (siehe Minikolloquium 10).
(ii) Beachte, dass für F auch gilt, dass $\Gamma_{ij}^k(0) = 0$ für alle $i,j,k \in \{1,2\}$.

Abgabe Dienstag, 6.7.2021 im ILIAS-Abgabetool Ihres Tutorates