Aufgabe 1 (*Kovariante Ableitungen*)
Es sei $F : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $F(\varphi, z) = (\cos\varphi, \sin\varphi, z^2)$.

(a) Berechne $\nabla_{e_2} e_2$ und $\nabla_{\cos(\varphi)e_2}(z^5 e_2)$.

(b) Berechne $\partial_2[g(e_2, e_2)]$ mithilfe von Formel (5) aus Satz 9.1. Kontrolliere Dein Ergebnis durch direktes Ausrechnen von $\partial_z g_{22}$.

Aufgabe 2 (*Orthonormale Koordinaten in einem Punkt*)
Es sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $x_0 \in U$ und $\widetilde{F} \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ eine Immersion mit erster Fundamentalform $\widetilde{g}_{ij}$.

(a) Zeige: Es gibt $V \subset \mathbb{R}^2$ offen und eine C^1-Umparametrisierung $\phi \in C^1(V, U)$ so, dass für $F = \widetilde{F} \circ \phi$ gilt

$$g_{ij}(\phi^{-1}(x_0)) = \delta_{ij}. \tag{1}$$

(*b) Ist es im Allgemeinen auch möglich, dass (1) auch in einer kleinen Umgebung von x_0 noch stimmt?