Aufgabe 1 (*Eine andere Formel für die zweite Fundamentalform*)
Es sei $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ eine Immersion mit Einheitsnormale N. Zeige: $N \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ und für alle $i, j \in \{1, 2\}$ gilt $h_{ij} = -\langle \partial_i F, \partial_j N \rangle$.

Aufgabe 2 (*Hauptkrümmungen von Rotationsflächen*)
Es sei $F : (0,1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $F(t, \phi) := (2\cos\phi, 2\sin\phi, t)$, ein *Zylinder mit Radius 2*. Berechne die *zweite Fundamentalform*, *die Weingartenabbildung und die Hauptkrümmungen* von F.

Hinweis: Dies ist eine Standardaufgabe. Um sie zu lösen, könnt ihr folgendes *Schritt-für-Schritt-Schema* verwenden.

1. Berechne $\partial_j F$ für $j = 1, 2$ und $\partial^2_{ij} F$ für $i, j \in \{1, 2\}$.
2. Berechne eine Normale $N = \frac{\partial_1 F \times \partial_2 F}{|\partial_1 F \times \partial_2 F|}$.
3. Berechne die zweite Fundamentalform über die Einträge $h_{ij} = \langle \partial^2_{ij} F, N \rangle$ für $i, j \in \{1, 2\}$. Schreibe die Einträge in eine Matrix (die nennen wir mal A) und erhalte die zweite Fundamentalform.
4. Berechne die erste Fundamentalform $g_{ij} = \langle \partial_i F, \partial_j F \rangle$ für $i, j \in \{1, 2\}$. Schreibe die Einträge in die Gram'sche Matrix G.
5. Invertiere G, d.h. berechne G^{-1}. Beachte: 2×2-Matrizen lassen sich leicht invertieren
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$
6. Berechne die Weingartenabbildung $S = G^{-1}A$, wobei G^{-1} aus Schritt 5 und A aus Schritt 3 kommt. Das Ergebnis ist dann die Weingartenabbildung.
7. Berechne die Eigenwerte κ_1 und κ_2 von S. Dies sind die Hauptkrümmungen.

Anmerkungen:

- Bei Schritt 2 ist es auch möglich, $N = -\frac{\partial_1 F \times \partial_2 F}{|\partial_1 F \times \partial_2 F|}$ zu nehmen. Manchmal ist die Normale sogar in der Aufgabe spezifiziert (dann nehmt eben diese Normale).
- Die Formel $S = G^{-1}A$ in Schritt 6 steht nicht im Skript, ist aber nichts anderes als Gleichung (7.4) in Matrixform.
- Statt den Hauptkrümmungen kann auch nur nach der *mittleren Krümmung* H und der *Gaußkrümmung* K gefragt sein. In dem Fall: Verwende (statt Schritt 7) die Formeln $H = \mathrm{Spur}(S)$ und $K = \det(S)$. (keine Eigenwertberechnungen, yay!)