Ernst Kuwert, Marius Müller
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/analysis/

Aufgabe 1 (*Frenet-Kurven*)

(a) Lies Dir Definition 1 und Definition 2 auf dem Übungsblatt zur Woche 9 durch und stelle Fragen, falls etwas unklar ist. Vergewissere Dich, dass für alle $t \in I$ das Frenet-Dreibein $\{T(t), N(t), B(t)\}$ eine ONB des $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Zeige, dass die Kurve $c(s) = (r\cos s, r\sin s, as)$ (wobei $r > 0, a \in \mathbb{R}$ mit $r^2 + a^2 = 1$) eine Frenet-Kurve ist. Bestimme ihre Binormale und ihre Torsion.

Aufgabe 2 (*Beschnupperung des Satzes von Picard-Lindelöf*)

(a) Lies Dir den folgenden *Satz von Picard-Lindelöf* durch:

Satz (*von Picard-Lindelöf*). Es sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $t_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Es sei $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und genüge einer *globalen Lipschitzbedingung*, d.h. es existiert $L > 0$ so, dass

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \qquad \forall\, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n \qquad \forall\, t \in I.$$

Dann besitzt das *Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & \forall\, t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

eine eindeutige Lösung $y \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$. Das heißt: es gibt eine eindeutige Funktion $y \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, die allen Bedingungen aus Gleichung (1) genügt.

(b) Gegeben sei (für $n = 1$) das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) & \forall\, t \in [-30, 30], \\ y(0) = 14. \end{cases} \tag{2}$$

Kennst Du eine Lösung? Gibt es weitere Lösungen?

- *Anmerkungen*: Es finden sich auch andere Versionen des Satzes von Picard-Lindelöf in der Literatur. Zum Beispiel ist es auch möglich, Lösungen zu finden, wenn die Funktion f nicht auf ganz $\mathbb{R}^n$ definiert ist und nur einer *lokalen Lipschitzbedingung* genügt. In dem Fall muss man aber damit leben, dass die Lösung nicht auf ganz I definiert ist, sondern möglicherweise nur in einer kleinen Umgebung von t_0. Die lokale Lipschitzbedingung ist insbesondere dann erfüllt, wenn $f \in C^1(I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.