Aufgabe 1 (*Wiederholungsfragen*)

Wahr oder Falsch?

1. Es sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre C^2-Kurve mit konstanter Krümmung $\kappa = \frac{1}{r}$. Dann liegt c auf einer Kreislinie mit Radius r.

2. Es sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre C^2-Kurve mit konstanter Krümmung $\kappa = \frac{1}{r}$. Dann geht c durch eine Euklidische Bewegung aus $\widetilde{c}(t) := (r\cos(t), r\sin(t)), (t \in I)$ hervor.

3. Es sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre C^2-Kurve mit konstanter Krümmung $\kappa = \frac{1}{r}$. Dann liegt c auf einer Kreislinie mit Radius r.

4. Es sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine C^2-Kurve gegeben durch $c(x) = (x, u(x))$. Es gilt:
$$u \text{ konvex } \Leftrightarrow \kappa \geq 0.$$
Hierbei ist κ die Krümmung bezüglich der Normalen $\nu = \frac{1}{|c'|} Jc'$.

5. Es sei $c : [0, \sqrt[5]{4\pi}] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $c(t) = (\cos(2.08 + t^5), \sin(2.08 + t^5))$. Dann gilt $n(c, (0, 0.7)) = 2$.

6. Es sei $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine C^2-Immersion mit Gram'scher Matrix G. Dann gilt
$$|\partial_1 F \times \partial_2 F| = \sqrt{\det(G)}$$

7. Es gibt eine C^1-Immersion $F : U \to \mathbb{R}^3$ mit $G(x) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ für alle $x \in U$.

8. Es gibt eine C^1-Immersion $F : U \to \mathbb{R}^3$ mit $G(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ für alle $x \in U$.

9. Ist eine C^1-Immersion $F : U \to \mathbb{R}^3$ längentreu parametrisiert, so ist auch jede Umparametrisierung längentreu parametrisiert.

10. Es sei $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine C^2-Immersion mit zweiter Fundamentalform h und Hauptkrümmungen $\kappa_1 \leq \kappa_2$. Dann gilt $\kappa_1(x) \leq h(x)(v, v) \leq \kappa_2(x)$ für alle $x \in U$ und alle $v \in \mathbb{R}^2$ mit $g(v, v) = 1$.

11. Es sei $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine C^2-Immersion. Dann gilt $H^2 - 4K \geq 0$.

12. Es sei $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine winkeltreu parametrisierte Minimalfläche. Dann gilt $\Delta F := F_{xx} + F_{yy} = 0$.

13. Jede Minimalfläche, die längentreu parametrisierbar ist, ist ein Stück einer Ebene.

14. Es sei $F : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eine Regelfläche. Dann ist F auf einer dichten Teilmenge von $I \times \mathbb{R}$ entweder ein Stück einer Ebene, einer Kegelfläche, einer Zylinderfläche oder einer Tangentenfläche.

15. Es seien $F : (-1,1)^2 \to \mathbb{R}^3$ und $\bar{F} : (-1,1)^2 \to \mathbb{R}^3$ Immersionen mit Fundamentalformen $g, \bar{g}$ bzw. $h, \bar{h}$. Gibt es eine Konstante $M \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $g = M^2 \bar{g}$ und $h = M\bar{h}$, so unterscheiden sich F und $M\bar{F}$ nur um euklidische Bewegungen.

16. Es sei (U, g) ein Riemannsches Gebiet (und U zusammenhängend). Dann gilt

$$g_{ij} \equiv const. \quad \forall\, i, j \in \{1,2\} \qquad \Leftrightarrow \qquad \Gamma_{ij}^k = 0 \quad \forall\, i, j, k \in \{1,2\}.$$

17. Es sei $F : B_1(0) \to \mathbb{R}^3$ eine Immersion und $\widetilde{F}(x) := F(-x)$. Dann gilt

$$\widetilde{\nabla}_{e_i} e_j(x) = -\nabla_{e_i} e_j(-x) \qquad \forall\, i, j \in \{1,2\}$$

für alle $x \in B_1(0)$. Hierbei bezeichnet suggestiv $\widetilde{\nabla}$ die kovariante Ableitung bzgl. $\widetilde{F}$.

18. Es sei $F : B_1(0) \to \mathbb{R}^3$ eine Immersion und $\widetilde{F}(x) := F(-x)$. Dann gilt

$$\widetilde{\nabla}_{\xi} \eta(x) = -\nabla_{\xi} \eta(-x) \qquad \forall\, \xi, \eta \in C^1(U, \mathbb{R}^2) \quad \forall\, x \in B_1(0).$$

19. Es sei (U, g) ein Riemannsches Gebiet und $\gamma : [a,b] \to U$ eine Geodätische. Dann gilt $P_\gamma(\gamma'(a)) = \gamma'(b)$, wobei P_γ die Parallelverschiebung längs γ bezeichnet.

20. Es sei (U, g) ein Riemannsches Gebiet und $\gamma : [a,b] \to U$ eine Geodätische. Es sei $\Phi : (U, g) \to (V, h)$ eine Riemannsche Isometrie. Dann ist $\Phi \circ \gamma$ eine Geodätische.

21. Jede Umparametrisierung einer Geodätischen ist wieder eine Geodätische.

*__Aufgabe 2__ (*Wiederholungsübung*)

1. Zeige oder widerlege: Jede C^2-Fläche, die winkeltreu parametrisierbar ist, ist auch längentreu parametrisierbar.

2. Es sei $F : U \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, ($U$ zusammenhängend) eine C^2-Immersion mit $N(x) = \lambda(x) F(x)$ für alle $x \in U$, mit $\lambda(x) = \frac{1}{|F(x)|}$. Zeige: $F(U)$ liegt in einer Sphäre mit Radius R für ein $R > 0$.

3. Es sei $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine C^2-Immersion und $x_0 \in U$ so, dass $x \mapsto \langle F(x), e_1 \rangle$ ein lokales Maximum bei x_0 annimmt. Zeige, dass $K(x_0) \geq 0$.

4. Es sei (U, g) ein Riemannsches Gebiet. Dann gilt

$$\frac{\nabla \gamma'}{dt} = \frac{d}{dt}(\log ||\gamma'||_g)\gamma' + ||\gamma'||_g^2 \vec{\kappa}_g.$$