Elementare Differentialgeometrie

Sommersemester 2021

Ernst Kuwert

Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Zusammenfassung

Dieses Skript basiert auf Vorlesungen, die ich in den Jahren 2006, 2011 und 2018 in Freiburg gehalten habe. Während des Sommersemesters 2021 wird das Skript laufend bearbeitet. Das Wort *elementar* im Titel bedeutet nur, dass es um Kurven und Flächen im Euklidischen Raum geht, und nicht um abstrakte Mannigfaltigkeiten. Das Ziel ist, mit Methoden der Analysis geometrische Aussagen zu beweisen, was oft gar nicht elementar ist.

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkung zum Euklidischen Raum

In dieser Vorlesung geht es um Kurven und Flächen im Raum $\mathbb{R}^n$, mit dem Euklidischen Abstand $d(x,y) = |x-y|$. Dabei ist

$$|x|^2 = \langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2.$$

Es sollen Größen oder Eigenschaften studiert werden, die geometrisch sind:

> die Eigenschaft oder Größe soll invariant sein, wenn die Kurve oder Fläche durch eine Isometrie des Euklidischen Raums bewegt wird.

Der Begriff der Invarianz muss hier richtig verstanden werden: eine skalare Größe wie zum Beispiel die Länge sollte gleich bleiben, während sich eine vektorielle Größe geeignet mittransformieren soll, zum Beispiel der Schwerpunkt. Manchmal wird die Invarianz auch nur bezüglich Isometrien verlangt, die die Orientierung erhalten. Die Frage nach dem geometrischen Charakter wird sich bei jeder neuen Definition stellen. Es wird nützlich sein, dazu die Isometrien des Euklidischen Raums explizit zu bestimmen, was wir nun tun wollen. Vorab die allgemeine Definition von isometrischen Abbildungen zwischen beliebigen metrischen Räumen (X,d) und (Y,d).

Definition 0.1 *Eine Abbildung $f : (X,d) \to (Y,d)$ heißt*

- *isometrisch, falls $d\big(f(x_1), f(x_2)\big) = d(x_1,x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in X$.*
- *Isometrie, falls f isometrisch und bijektiv ist.*

Eine isometrische Abbildung ist immer injektiv, denn es gilt

$$d\big(f(x_1), f(x_2)\big) = d(x_1,x_2) > 0 \quad \text{für } x_1 \neq x_2.$$

Ist sie zusätzlich surjektiv, so ist sie eine Isometrie.

Lemma 0.1 *Die Isometrien eines metrischen Raums (X,d) bilden eine Gruppe.*

Beweis: Gemeint ist, dass die Isometrien bzgl. der Verkettung eine Gruppe bilden, das heißt eine Untergruppe der Bijektionen von X. Aber für Isometrien f, g von X gilt

$$d\big(g^{-1}f(x), g^{-1}f(y)\big) = d\big(gg^{-1}f(x), gg^{-1}f(y) = d\big(f(x), f(y)\big) = d(x,y),$$

das heißt $g^{-1}f$ ist wieder eine Isometrie. $\square$

Die Translationen $\tau_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\tau_a(x) = x + a$ mit $a \in \mathbb{R}^n$, sind Isometrien des Euklidischen Raums, denn es gilt für $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$d(\tau_a(x), \tau_a(y)) = |\tau_a(x) - \tau_a(y)| = |(x+a) - (y+a)| = |x-y| = d(x,y).$$

Ebenso die orthogonalen Abbildungen

$$\mathbb{O}(n) = \{S \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n) : \langle Sx, Sy\rangle = \langle x, y\rangle \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Für $S \in \mathbb{O}(n)$ gilt nämlich

$$d(Sx, Sy) = |S(x-y)| = \sqrt{\langle S(x-y), S(x-y)\rangle} = |x-y| = d(x,y).$$

Wir zeigen nun, dass sich jede Isometrie des $\mathbb{R}^n$ aus einer Translation und einer orthogonalen Abbildung zusammensetzt.

Satz 0.1 (Isometrien des $\mathbb{R}^n$) *Die Isometrien des $\mathbb{R}^n$ sind von der Form*

$$f(x) = Sx + a \quad \text{mit } S \in \mathbb{O}(n) \text{ und } a \in \mathbb{R}^n.$$

Diese Abbildungen nennt man auch Euklidische Bewegungen.

Beweis: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Isometrie, zunächst mit $f(0) = 0$. Dann folgt

$$|f(x)| = d\big(f(x), 0\big) = d\big(f(x), f(0)\big) = d(x, 0) = |x|.$$

Mit der Polarisationsformel schließen wir, dass f das Skalarprodukt erhält:

$$\begin{aligned} \langle f(x), f(y)\rangle &= -\frac{1}{2}\big(|f(x)-f(y)|^2 - |f(x)|^2 - |f(y)|^2\big) \\ &= -\frac{1}{2}(|x-y|^2 - |x|^2 - |y|^2) \\ &= \langle x, y\rangle. \end{aligned}$$

Ist $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis, so folgt

$$\langle f(e_i), f(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij},$$

das heißt $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ ist wieder Orthonormalbasis, und

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle f(x), f(e_i)\rangle\, f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle f(e_i) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Somit ist f eine lineare Abbildung (was ja nicht vorausgesetzt war!). Da f das Skalarprodukt erhält, ist $f(x) = Sx$ für ein $S \in \mathbb{O}(n)$.

Ist $f(0) = a \in \mathbb{R}^n$ beliebig, so gilt $(\tau_{-a} \circ f)(0) = 0$. Wie gezeigt ist dann $\tau_{-a} \circ f(x) = Sx$ für ein $S \in \mathbb{O}(n)$, also $f(x) = Sx + a$. $\square$

Bemerkung. Für eine Isometrie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist die Darstellung $f(x) = Sx + a$ eindeutig bestimmt, denn es gilt $a = f(0)$ und $S = Df(0)$ (bzw. sogar $S = Df(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$).

Definition 0.2 *Eine Isometrie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = Sx + a$, heißt orientierungserhaltend oder eigentliche Bewegung, falls* $\det S = 1$.

1 Bogenlänge von Kurven

Definition 1.1 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Abbildung $c \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ heißt stetige Kurve im $\mathbb{R}^n$.*

Salopp gesagt besteht eine Kurve aus ihrem Bild im $\mathbb{R}^n$ und einem Fahrplan, wie dieses Bild durchlaufen wird. In der Physik spielt der Fahrplan eine wesentliche Rolle, für die Bewegung der Erde um die Sonne ergeben sich zum Beispiel so die Jahreszeiten. In der Geometrie ist man an den Größen interessiert, die nicht vom Fahrplan abhängen. Wie wir sehen werden, gehört dazu die Bogenlänge. Wir haben es hier mit einer zweiten wichtigen Invarianz zu tun, nämlich der Invarianz gegenüber Umparametrisierungen.

Definition 1.2 *Seien $c_k : I_k \to \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2$, stetige Kurven. Dann heißt c_2 Umparametrisierung von c_1, falls es $\varphi \in C^0(I_2, I_1)$ bijektiv gibt mit $c_2 = c_1 \circ \varphi$.*

Es ist leicht zusehen, dass hierdurch eine Äquivalenzrelation $c_1 \sim c_2$ gegeben ist:

$$\begin{array}{lrcl} c : I \to \mathbb{R}^n & \Rightarrow \quad c & = & c \circ \mathrm{id}_I \\ c_2 = c_1 \circ \varphi & \Rightarrow \quad c_1 & = & c_2 \circ \varphi^{-1} \\ c_2 = c_1 \circ \varphi,\, c_3 = c_2 \circ \psi & \Rightarrow \quad c_3 & = & c_1 \circ (\varphi \circ \psi). \end{array}$$

Beachte, dass nach dem Zwischenwertsatz jede Umparametrisierung streng monoton wachsend oder fallend ist. Dann ist auch φ^{-1} streng monoton, und stetig: hätte φ^{-1} einen Sprung, so wäre φ auf einem Intervall konstant, Widerspruch. Siehe Analysis 1 für das ausführliche Argument. Folgende Größen sind offensichtlich unter Umparametrisierung invariant:

- das Bild $c(I)$,
- die Menge der Endpunkte $\{c(a), c(b)\}$, falls $a, b \in I$,
- Anfangs- und Endpunkt $c(a)$ und $c(b)$, falls wir nur orientierungstreue Umparametrisierungen φ zulassen.

Hier ein paar einfache Beispiele von stetigen Kurven.

Beispiel 1.1 $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $c(t) = p + tv$, wobei $p \in \mathbb{R}^n$ und $v \in \mathbb{R}^n$.
Der Fall $v = 0$, also $c(t) = p$ für alle t, ist auch zugelassen.

Beispiel 1.2 $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = r(\cos t, \sin t)$.
Eine Parametrisierung des Kreises um den Nullpunkt mit Radius $r > 0$.

Beispiel 1.3 $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $c(t) = (r \cos t, r \sin t, a\, t)$
Eine Parametrisierung einer Helix (Schraubenlinie) mit Radius $r > 0$ und Ganghöhe $2\pi a$.

In den Übungen sollen mehr Beispiele besprochen werden. Wir kommen nun zur Definition der Bogenlänge einer stetigen Kurve $c : I \to \mathbb{R}^n$ auf einem kompakten

Intervall $I = [a, b]$. Eine Zerlegung Z von I ist ein Tupel $(t_0, \ldots, t_N)$ mit $a = t_0 \leq t_1 \ldots \leq t_N = b$. Für $c \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ setzen wir

$$L_Z(c) = \sum_{i=1}^{N} |c(t_i) - c(t_{i-1})|. \tag{1.1}$$

$L_Z(c)$ ist die Länge des Polygonzugs, der die Punkte $c(t_i)$ verbindet. Es ist dabei zu beachten, dass die Unterteilung im Parameterintervall $[a, b]$ definiert ist und nicht im Bild, so dass die Formel zum Beispiel mehrfache Umläufe eines Kreises berücksichtigt.

Definition 1.3 *Die Länge der stetigen Kurve $c \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$, $I = [a, b]$, ist*

$$L(c) = \sup_Z L_Z(c) \in [0, \infty].$$

Ist $L(c) < \infty$, so heißt c rektifizierbar.

Wir stellen als erstes fest, dass die so definierte Bogenlänge tatsächlich unter Umparametrisierungen invariant ist.

Lemma 1.1 *Seien $I_k = [a_k, b_k]$, $k = 1, 2$, und $\varphi \in C^0(I_2, I_1)$ bijektiv. Für jede stetige Kurve $c \in C^0(I_1, \mathbb{R}^n)$ gilt dann*

$$L(c \circ \varphi) = L(c).$$

Beweis: Wir hatten schon festgestellt, dass φ entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist. Ist $Z = (s_0, \ldots, s_N)$ Zerlegung von I_2 und $t_i = \varphi(s_i)$, so ist entweder $(t_0, \ldots, t_N)$ oder $(t_N, \ldots, t_0)$ eine Zerlegung von I_1. In jedem Fall gilt

$$L_Z(c \circ \varphi) = \sum_{i=1}^{N} |c(\varphi(s_i)) - c(\varphi(s_{i-1}))| = \sum_{i=1}^{N} |c(t_i) - c(t_{i-1})| \leq L(c).$$

Es folgt $L(c \circ \varphi) \leq L(c)$. Mit $c = (c \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}$ folgt $L(c \circ \varphi) = L(c)$. □

Unsere Situation ist nun vergleichbar mit der Definition des Riemannschen Integrals, es stellen sich folgende Fragen:

- Welche Kurven sind rektifizierbar?
- Wie können wir die Länge $L(c)$ berechnen?

Eine Antwort auf die erste Frage ist wie folgt.

Lemma 1.2 *Sei $c : I = [a, b] \to \mathbb{R}^n$ Lipschitzstetig mit Konstante $\mathrm{Lip}(c) < \infty$. Dann ist c rektifizierbar, und es gilt*

$$L(c) \leq \mathrm{Lip}(c)\, |I|.$$

Beweis: Für eine beliebige Zerlegung Z ist

$$L_Z(c) = \sum_{i=1}^{N} |c(t_i) - c(t_{i-1})| \leq \mathrm{Lip}(c) \sum_{i=1}^{N} (t_i - t_{i-1}) = \mathrm{Lip}(c)\,|I|.$$

□

Die folgende Additivität unter Zerlegungen brauchen wir beim Beweis der Formel für die Bogenlänge unten.

Lemma 1.3 *Sei $\tau \in I = [a,b]$. Dann gilt für $c \in C^0(I,\mathbb{R}^n)$*

$$L(c) = L(c|_{[a,\tau]}) + L(c|_{[\tau,b]}).$$

Beweis: Setze $I_1 = [a,\tau]$ und $I_2 = [\tau,b]$. Sind Z_1, Z_2 Zerlegungen von I_1 und I_2, so ist (Z_1,Z_2) Zerlegung von I und folglich

$$L_{Z_1}(c|_{I_1}) + L_{Z_2}(c|_{I_2}) = L_{(Z_1,Z_2)}(c) \leq L(c).$$

Bildung des Supremums über alle Z_1, Z_2 ergibt $L(c|_{I_1}) + L(c|_{I_2}) \leq L(c)$. Für die umgekehrte Ungleichung sei $Z = (t_0,\ldots,t_N)$ eine beliebige Zerlegung von $[a,b]$. Dann gibt es ein $r \in \{1,\ldots,N\}$ mit $\tau \in [t_{r-1},t_r]$, und wir erhalten die Zerlegungen $Z_1 = (t_0,\ldots,t_{r-1},\tau)$ von I_1 sowie $Z_2 = (\tau,t_r,\ldots,t_N)$ von I_2. Es folgt aus der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}
L_Z(c) &= \sum_{i=1}^{N} |c(t_i) - c(t_{i-1})| \\
&\leq \sum_{i=1}^{r-1} |c(t_i) - c(t_{i-1})| + |c(\tau) - c(t_{r-1})| + |c(t_r) - c(\tau)| + \sum_{i=r+1}^{N} |c(t_i) - c(t_{i-1})| \\
&= L_{Z_1}(c|_{I_1}) + L_{Z_2}(c|_{I_2}) \\
&\leq L(c|_{I_1}) + L(c|_{I_2}).
\end{aligned}$$

Bildung des Supremums über alle Z ergibt $L(c) \leq L(c|_{I_1}) + L(c|_{I_2})$. □

Wir kommen jetzt zur Antwort auf die zweite Frage, also die Berechnung der Länge. Dabei kommt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ins Spiel, nicht überraschend.

Satz 1.1 (Bogenlängenformel) *Sei $c \in C^1(I,\mathbb{R}^n)$ mit $I = [a,b]$. Dann ist c rektifizierbar und es gilt*

$$L(c) = \int_a^b |c'(t)|\,dt.$$

Beweis: Für jede Zerlegung $Z = (t_0,\ldots,t_N)$ von $[a,b]$ gilt

$$L_Z(c) = \sum_{i=1}^{N} |c(t_i) - c(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{N} \Big| \int_{t_{i-1}}^{t_i} c'(t)\,dt \Big| \leq \sum_{i=1}^{N} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |c'(t)|\,dt = \int_a^b |c'(t)|\,dt.$$

Also ist c rektifizierbar und es folgt

$$L(c) \le \int_a^b |c'(t)|\,dt. \tag{1.2}$$

Wir betrachten nun die Bogenlängenfunktion

$$\ell : [a,b] \to \mathbb{R},\ \ell(t) = L(c|_{[a,t]}).$$

Wir zeigen $\ell'(t) = |c'(t)|$ für alle $t \in [a,b]$, daraus folgt durch Integration:

$$L(c) = \ell(b) = \underbrace{\ell(a)}_{=0} + \int_a^b \ell'(t)\,dt = \int_a^b |c'(t)|\,dt.$$

Sei $t_1 < t_2$. Mit Definition der Länge als Supremum, Additivität bei Zerlegungen und der schon gezeigten Abschätzung (1.2) sehen wir

$$\frac{|c(t_2) - c(t_1)|}{t_2 - t_1} \le \frac{L(c|_{[t_1,t_2]})}{t_2 - t_1} = \frac{\ell(t_2) - \ell(t_1)}{t_2 - t_1} \le \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |c'(t)|\,dt.$$

Für $t_2 \searrow t_1$ gehen beide Seiten gegen $|c'(t_1)|$, für $t_1 \nearrow t_2$ gegen $|c'(t_2)|$. Also gilt $\ell'(t) = |c'(t)|$, und der Satz ist bewiesen. $\square$

Es ist nützlich, die Formel auch für stetige Kurven $c : I \to \mathbb{R}^n$ zu haben, die nur stückweise C^1 sind. Das bedeutet, es gibt eine Zerlegung $Z = (t_0, \ldots, t_N)$ von I, so dass $c|_{I_k} \in C^1(I_k, \mathbb{R}^n)$ für alle $I_k = [t_{k-1}, t_k]$. Die rechts- und linksseitigen Grenzwerte $c'_\pm(t)$ müssen nicht gleich sein. Diese Version folgt sofort aus der C^1-Formel, Satz 1.1, wegen der Additivität der Länge, Lemma 1.3, und der Additivität des Riemann-Integrals bei Zerlegungen.

Für die Klasse der C^1-Kurven muss der Begriff der Umparametrisierung stärker gefasst werden, damit die C^1-Eigenschaft darunter erhalten bleibt.

Definition 1.4 *Eine Kurve $c_2 \in C^1(I_2, \mathbb{R}^n)$ heißt C^1-Umparametrisierung von $c_1 \in C^1(I_1, \mathbb{R}^n)$, falls es ein $\varphi \in C^1(I_2, I_1)$ bijektiv gibt mit $\varphi' \neq 0$, so dass $c_2 = c_1 \circ \varphi$.*

Die Bedingung $\varphi' \neq 0$ garantiert, dass φ^{-1} wieder eine C^1-Abbildung ist, und damit c_1 auch eine C^1-Umparametrisierung von c_2. Insbesondere haben wir wieder eine Äquivalenzrelation. Das übliche Gegenbeispiel ist $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = t^3$, mit der nicht differenzierbaren Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1}(s) = \begin{cases} s^{1/3} & \text{für } s \ge 0, \\ -(-s)^{1/3} & \text{für } s < 0. \end{cases}$$

Ist $c \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ und $c'(t_0) \neq 0$, so ist das Bild eines hinreichend kleinen Intervalls $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Dies besagt der Satz über implizite Funktionen. Ist aber $c'(t_0) = 0$, so muss das nicht gelten, wie etwas das Beispiel der Neilschen Parabel zeigt.

Beispiel 1.4 $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ c(t) = (t^2, t^3)$.

Stellen $t_0 \in I$ mit $c'(t_0) \neq 0$ nennen wir regulär. Die Gerade $\mathbb{R} \cdot c'(t_0)$ ist die Tangente in $t_0 \in I$. Lokal wird die Kurve durch ihre affine Tangente $c(t_0)+\mathbb{R}\cdot c'(t_0)$ beschrieben. Ist $c'(t_0) = 0$, so sprechen wir von einer Singularität. In diesem Fall haben wir keine einfache, lokale Beschreibung.

Definition 1.5 *Eine Kurve $c \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ heißt regulär, falls*

$$c'(t) \neq 0 \quad \textit{für alle } t \in I.$$

Ist $c \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ regulär, so auch die C^1-Umparametrisierung $c\circ\varphi$, denn $(c\circ\varphi)' = c' \circ \varphi\, \varphi' \neq 0$. Es ist eine berechtigte Frage, ob es unter den vielen möglichen Parametrisierungen einer Kurve eine besonders günstige gibt. Die Antwort heißt ja, und zwar durchläuft diese Parametrisierung das Bild mit Geschwindigkeit Eins. Diese spezielle Parametrisierung wollen wir nun bestimmen.

Definition 1.6 *Eine Kurve $c \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ heißt nach der Bogenlänge parametrisiert, falls gilt:*

$$|c'(s)| = 1 \qquad \textit{für alle } s \in I.$$

Eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve bildet längentreu ab, und zwar folgt aus Satz 1.1 für $[s_1, s_2] \subset I$

$$L(c|_{[s_1,s_2]}) = \int_{s_1}^{s_2} |c'(s)|\, ds = s_2 - s_1.$$

Diese Charakterisierung kann man auch für Kurven verwenden, die nur rektifizierbar aber nicht notwendig C^1 sind. Aus Gründen der Einfachheit wollen wir das hier nicht machen.

Satz 1.2 (Parametrisierung nach der Bogenlänge) *Sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre C^1-Kurve. Dann gibt es eine C^1-Umparametrisierung $c\circ\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi' > 0$, die nach der Bogenlänge parametrisiert ist (insbesondere ist J Intervall der Länge $L(c)$).*

Beweis: Die gesuchte Umparametrisierung soll folgendes erfüllen:

$$1 = |(c \circ \varphi)'(s)| = |c'|(\varphi(s))\, \varphi'(s) \qquad \text{für alle } s \in J. \tag{1.3}$$

Betrachte für $t_0 \in I$ beliebig die Funktion $\ell \in C^1(I)$, $\ell(t) = \int_{t_0}^{t} |c'(\tau)|\, d\tau$. Dann ist $\ell'(t) = |c'(t)| > 0$, also ist (1.3) gleichbedeutend mit

$$\varphi'(s) = \frac{1}{\ell'(\varphi(s))} \qquad \text{für alle } s \in J.$$

Das ist erfüllt, wenn wir die Umkehrfunktion $\varphi \in C^1(J, I)$ von ℓ wählen, wobei $J = \ell(I)$. Insbesondere ist dann $\varphi' > 0$. □

Sind c_1 und $c_2 = c_1 \circ \varphi$ beide nach der Bogenlänge parametrisiert, so folgt

$$1 = |c_2'(s)| = |c_1'\big(\varphi(s)\big)|\, |\varphi'(s)| = |\varphi'(s)|,$$

das heißt $\varphi(s) = \pm s + s_0$ für $s_0 \in \mathbb{R}$. Die Parametrisierung nach der Bogenlänge ist also im wesentlichen eindeutig bestimmt.

Die Städte Frankfurt und Vancouver haben etwa denselben Breitengrad, auf dem Verbindungsflug kann man aber Eisberge sehen: offenbar folgt der Flug nicht dem Breitengrad. Wir wollen zum Schluss des Kapitels die kürzeste Verbindung von Punkten p, q auf der Sphäre $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ bestimmen. Das Infimum der Längen aller Verbindungskurven auf $\mathbb{S}^{n-1}$ nennen wir den Bogenabstand von p und q. Einen Schnitt von $\mathbb{S}^{n-1}$ mit einem 2-dimensionalen Unterraum bezeichnet man als Großkreis. Im Fall $0 < \sphericalangle(p,q) < \pi$ spannen p, q eine solche Ebene E auf und zerlegen den zugehörigen Großkreis in zwei Bögen. Wir wollen zeigen, dass der kürzere dieser Bögen die optimale Flugroute liefert, der Bogenabstand ist also gleich

$$\sphericalangle(p,q) = \arccos\langle p, q\rangle \in (0,\pi).$$

Im Grenzfall $\sphericalangle(p,q) = \pi$ können $p, q = -p$ durch unendliche viele Großhalbkreise verbunden werden, diese sind jeweils kürzeste Verbindungen mit Länge π.

Satz 1.3 (Bogenabstand auf $\mathbb{S}^{n-1}$) *Sei $c : [a,b] \to \mathbb{S}^{n-1}$ eine stückweise C^1-Kurve mit Endpunkten p, q. Dann gilt*

$$L(c) \geq \sphericalangle(p,q).$$

Bei Gleichheit durchläuft c monoton den kürzeren Großkreisbogen von p nach q.

Beweis: Nach Drehung ist $p = e_n$. Betrachte die Polarwinkelfunktion

$$\theta \in C^0(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}),\ \theta(x) = \arccos\left\langle \frac{x}{|x|}, e_n \right\rangle \in [0,\pi].$$

θ ist C^1 auf $U = \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin \mathbb{R} \cdot e_n\}$. Um die Ableitung von θ zu berechnen, betrachte für $\xi, \eta \in \mathbb{S}^{n-2}$ mit $\xi \perp \eta$ die Abbildung

$$f : (0,\infty) \times (0,\pi) \times \mathbb{R} \to U,\ f(r,t,\varphi) = r\big(\sin t\,(\cos\varphi\,\xi + \sin\varphi\,\eta)\,,\,\cos t\big).$$

Es gilt $\theta\big(f(r,t,\varphi)\big) = t$, also folgt durch Differentiation

$$\begin{aligned}
\langle \operatorname{grad}\theta\,(\sin t\,\xi, \cos t), (\sin t\,\xi, \cos t)\rangle &= 0,\\
\langle \operatorname{grad}\theta\,(\sin t\,\xi, \cos t), (\sin t\,\eta, 0)\rangle &= 0,\\
\langle \operatorname{grad}\theta\,(\sin t\,\xi, \cos t), (\cos t\,\xi, -\sin t)\rangle &= 1.
\end{aligned}$$

Damit sehen wir (hier könnte eine Skizze gemacht werden)

$$\operatorname{grad}\theta(\sin t\,\xi, \cos t) = (\cos t\,\xi, -\sin t), \quad \text{und} \quad |\operatorname{grad}\theta(\sin t\,\xi, \cos t)| = 1.$$

Sei nun $c(t)$ eine stückweise C^1-Kurve von p nach q, zunächst mit

$$0 < \theta(c(t)) < \pi \quad \text{für } a < t < b. \tag{1.4}$$

Mit dem Hauptsatz, der Kettenregel und Cauchy-Schwarz folgt dann

$$\sphericalangle(p,q) = \theta(c(b)) - \theta(c(a)) = \int_a^b \langle \operatorname{grad}\theta(c(t)), c'(t)\rangle\, dt \le \int_a^b |c'(t)|\, dt = L(c).$$

Es gelte nun Gleichheit, wobei wir erst $c \in C^1([a,b])$ annehmen. Dann folgt

$$c'(t) = \lambda(t)\operatorname{grad}\theta(c(t)) \text{ mit } \lambda(t) = |c'(t)| \quad \text{für alle } t \in (a,b). \tag{1.5}$$

Für $\gamma(s) = (\sin s\,\xi, \cos s)$ mit $\xi \in \mathbb{S}^{n-2}$ beliebig gilt

$$\gamma'(s) = \operatorname{grad}\theta(\gamma(s)) \quad \text{für alle } s \in \mathbb{R}.$$

Also erhalten wir eine Lösung der Differentialgleichung (1.5) auf (a,b) durch

$$\tilde{c}(t) = \gamma(\varphi(t)) \quad \text{falls } \varphi'(t) = \lambda(t).$$

Zu $t_0 \in (a,b)$ wollen wir ξ und φ so wählen, dass $\tilde{c}(t_0) = c(t_0)$. Dann folgt $c(t) = \tilde{c}(t)$ für alle $t \in (a,b)$ wegen Eindeutigkeit für das Anfangswertproblem. Beachte dabei, dass das Vektorfeld $X(t,x) = \lambda(t)\operatorname{grad}\theta(x)$ stetig und nach x stetig differenzierbar ist auf $(a,b)\times U$. Wir wählen nun $\xi \in \mathbb{S}^{n-2}$, so dass $\gamma(s_0) = c(t_0)$ für ein $s_0 \in (0,\pi)$, und setzen dann

$$\varphi(t) = s_0 + \int_{t_0}^t \lambda(\tau)\, d\tau.$$

Es folgt $\tilde{c}(t_0) = \gamma(\varphi(t_0)) = \gamma(s_0) = c(t_0)$ wie gewünscht. Somit verläuft $c(t)$ auf dem Großkreis durch e_n und ξ, und der Polarwinkel ist monoton wachsend wegen

$$\frac{d}{dt}\theta(c(t)) = \langle \operatorname{grad}\theta(c(t)), \lambda(t)\operatorname{grad}\theta(c(t))\rangle = \lambda(t) = |c'(t)| \ge 0.$$

Ist nur $c \in C^1([t_{k-1},t_k])$ für eine Unterteilung $a = t_0 < \ldots < t_N = b$, so gilt die Differentialgleichung (1.5) auf $[t_{k-1},t_k]$, also durchläuft $c(t)$ auf jedem Teilintervall ein Stück eines Längengrads. Wegen Stetigkeit setzen sich die Stücke zu dem Bogen von p nach q zusammen.

Ohne die Annahme (1.4) wähle $a_1 \in [a,b]$ maximal mit $\theta(c(a_1)) = 0$, und dann $b_1 \in [a_1,b]$ maximal mit $\theta(c(t)) < \pi$ für $a_1 < t < b_1$. Es folgt

$$L(c) \ge L(c|_{[a_1,b_1]}) \ge \theta(c(b_1)) - \theta(c(a_1)) = \begin{cases} \sphericalangle(p,q) & \text{falls } b_1 = b,\\ \pi & \text{falls } b_1 < b.\end{cases}$$

Bei Gleichheit ist $c(t)$ auf $[a,a_1]$ konstant gleich p, auf $[b_1,b]$ konstant gleich q, und auf $[a_1,b_1]$ durchläuft $c(t)$ den vertikalen Großkreisbogen von p nach q. □

2 Krümmung von Kurven

Beschreibt $c(t)$ eine Autofahrt im $\mathbb{R}^n$, so ist die Beschleunigung gleich $c''(t)$. Eine Änderung der Absolutgeschwindigkeit durch Bremsen oder Gas geben bewirkt eine Beschleunigung in Fahrtrichtung. Das ist auch auf einer Geraden möglich, es hat nichts mit der Geometrie der Straße zu tun. Aber auch bei konstanter Geschwindigkeit treten Beschleunigungen auf, wenn sich die Fahrtrichtung ändert, diese sind senkrecht zur Fahrtrichtung. Sie sind geometrisch begründet durch die Krümmung der Straße, wobei ihre Größe noch von der Absolutgeschwindigkeit abhängt.

Definition 2.1 *Sei $c \in C^2(I, \mathbb{R}^n)$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve, also $|c'(s)| = 1$ für alle $s \in I$. Der Krümmungvektor von c ist die Funktion*

$$\vec{\varkappa} : I \to \mathbb{R}^n,\ \vec{\varkappa}(s) = c''(s).$$

Die skalare Krümmung ist $\varkappa : I \to [0, \infty)$, $\varkappa(s) = |\vec{\varkappa}(s)| \quad (= |c''(s)|)$.

Der Krümmungsvektor steht senkrecht auf den Tangentenvektor, denn es gilt

$$\langle \vec{\varkappa}(s), c'(s) \rangle = \langle c''(s), c'(s) \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \langle c'(s), c'(s) \rangle = 0. \tag{2.1}$$

Beispiel 2.1 Die Kurve

$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ c(s) = r \Big(\cos \frac{s}{r}, \sin \frac{s}{r} \Big),$$

parametrisiert einen Kreis vom Radius $r > 0$ nach der Bogenlänge. Wir haben

$$\vec{\varkappa}(s) = -\frac{1}{r} \Big(\cos \frac{s}{r}, \sin \frac{s}{r} \Big) \quad \text{und} \quad \varkappa(s) = \frac{1}{r}.$$

Beispiel 2.2 Die Schraubenlinie

$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ c(t) = (r \cos t, r \sin t, at),$$

hat $|c'(t)| = \sqrt{r^2 + a^2}$. Damit lautet die Parametrisierung nach der Bogenlänge

$$c_0(s) = \Big(r \cos \frac{s}{\sqrt{r^2 + a^2}}, r \sin \frac{s}{\sqrt{r^2 + a^2}}, \frac{as}{\sqrt{r^2 + a^2}} \Big).$$

Der Krümmungsvektor und die Krümmung sind

$$\begin{aligned} \vec{\varkappa}_0(s) &= -\frac{1}{r^2 + a^2} \Big(r \cos \frac{s}{\sqrt{r^2 + a^2}}, r \sin \frac{s}{\sqrt{r^2 + a^2}}, 0 \Big), \\ \varkappa_0(s) &= \frac{r}{r^2 + a^2}. \end{aligned}$$

Wie wir sehen werden, ergibt sich die Krümmung von $c(t)$ durch Umparametrisierung, also Substitution $s = \sqrt{r^2 + a^2}\, t$,

$$\vec{\varkappa}(t) = -\frac{1}{r^2 + a^2} (r \cos t, r \sin t, 0), \quad \varkappa(t) = \frac{r}{r^2 + a^2}.$$

Es ist interessant, dass die Schraubenlinie mit Parametern $r, a > 0$ dieselbe Krümmungssfunktion hat wie ein Kreis mit Radius $(r^2 + a^2)/r$. Dies zeigt, dass eine Raumkurve nicht allein durch die Krümmung bestimmt ist.

Beispiel 2.3 Für $p, v \in \mathbb{R}^n$ mit $|v| = 1$ beschreibt $c(s) = p + sv$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Gerade. Der Krümmungsvektor ist $c''(s) \equiv 0$.

Wir wollen nun die Definition der Krümmung auf beliebige, reguläre Kurven $c(t)$ erweitern.

Definition 2.2 *Sei $c \in C^2(I, \mathbb{R}^n)$ eine reguläre Kurve, und $c = c_0 \circ \varphi : I \to \mathbb{R}^n$ mit c_0 nach der Bogenlänge parametrisiert. Dann definieren wir den Krümmungsvektor und die Krümmung von c durch*

$$\vec{\varkappa} = \vec{\varkappa}_0 \circ \varphi \quad \text{und} \quad \varkappa = \varkappa_0 \circ \varphi. \tag{2.2}$$

Natürlich soll die Umparametrisierung nach der Bogenlänge nicht im Einzelfall durchgeführt werden, wir wollen eine Formel herleiten. Es gilt

$$\begin{aligned} c' &= c_0' \circ \varphi \, \varphi', \\ c'' &= c_0'' \circ \varphi \, (\varphi')^2 + c_0' \circ \varphi \, \varphi''. \end{aligned}$$

Da c_0 nach der Bogenlänge parametrisiert ist, gilt

$$|c_0'|^2 = 1 \quad \text{und} \quad \langle c_0'', c_0' \rangle = 0.$$

Die erste Gleichung oben liefert nun $|c'| = |\varphi'|$, und aus der zweiten Gleichung folgt durch Bilden der Komponente $\perp$ senkrecht zu c'

$$\vec{\varkappa} = \vec{\varkappa}_0 \circ \varphi = \frac{(c'')^\perp}{|c'|^2}, \tag{2.3}$$

$$\varkappa = \frac{\sqrt{|c'|^2 |c''|^2 - \langle c', c'' \rangle^2}}{|c'|^3}. \tag{2.4}$$

Die Parametrisierung nach der Bogenlänge einer Kurve c bleibt erhalten bei Übergang zu Sc mit $S \in \mathbb{O}(n)$, oder zu $c + a$ mit $a \in \mathbb{R}^n$. Wegen $(Sc)'' = Sc''$ und $(c + a)'' = c''$ transformiert sich der Krümmungsvektor unter Isometrien wie gewünscht. Insgesamt haben wir nun ein Konzept von Krümmung von Raumkurven, das geometrisch invariant ist und für Kreise den „richtigen“ Wert liefert. Es stellt sich die Frage, ob wir mit diesem Konzept auch geometrisch relevante Aussagen zeigen können. Im folgenden geht es um die Frage, wieviel Krümmung benötigt wird, um eine geschlossene Kurve herzustellen.

Satz 2.1 (Ungleichung von Fenchel) *Sei $c \in C^2([0, L], \mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$, nach der Bogenlänge parametrisiert und C^1-geschlossen. Dann gilt*

$$\int_0^L \varkappa(s) \, ds \geq 2\pi.$$

Bei Gleichheit ist c eine ebene, einfach geschlossene Kurve, die ein konvexes Gebiet berandet.

Mit C^1-geschlossen ist gemeint, dass $c(0) = c(L)$ und $c'(0) = c'(L)$ ist.

Der Beweis verwendet folgendes Lemma.

Lemma 2.1 *Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{S}^{n-1}$, $n \geq 2$, eine stückweise C^1-Kurve von p nach q. Dabei seien p, q in der offenen Nordhalbsphäre, symmetrisch zum Nordpol. Ist dann $L(\gamma) \leq \pi$, so liegt γ in der abgeschlossenen Nordhalbsphäre.*

Beweis: Wir können $\langle \gamma(t_0), e_n \rangle = 0$ annehmen für ein $t_0 \in (a,b)$. Betrachte dann, mit $S(x', x_n) = (x', -x_n)$, die Kurve

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{für } a \leq t \leq t_0, \\ S\gamma(t) & \text{für } t_0 < t \leq b. \end{cases}$$

$\tilde{\gamma}$ ist stückweise C^1 und verbindet p mit $Sq = -p$, mit $L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma) \leq \pi$. Nach Satz 1.3 durchläuft $\tilde{\gamma}$ monoton einen Großhalbkreis von p nach $-p$. Es folgt

$$\langle \tilde{\gamma}(t), e_n \rangle \geq 0 \text{ auf } [a, t_0] \quad \text{und} \quad \langle \tilde{\gamma}(t), e_n \rangle \leq 0 \text{ auf } [t_0, b].$$

Somit ist $\langle \gamma(t), e_n \rangle \geq 0$ auf $[a,b]$ wie behauptet. □

Der Beweis zeigt, dass γ sogar in der offenen Halbsphäre liegt wenn $L(\gamma) < \pi$, aber das wird im Folgenden nicht gebraucht. Die folgende Anwendung ist eine Vorstufe zu Satz 2.1, aber auch für sich von Interesse.

Satz 2.2 *Sei $c : [0,L] \to \mathbb{R}^n$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte C^2-Kurve. Ist c geschlossen, also $c(0) = c(L)$, so gilt*

$$\int_0^L \varkappa(s)\, ds > \pi.$$

Beweis: Setze $\gamma = c' : [0,L] \to \mathbb{S}^{n-1}$. Da $c(s)$ geschlossen ist, gilt

$$\int_0^L \gamma(s)\, ds = \int_0^L c'(s)\, ds = c(L) - c(0) = 0. \tag{2.5}$$

Weiter folgt direkt aus der Definition

$$\int_0^L \varkappa(s)\, ds = \int_0^L |c''(s)|\, ds = \int_0^L |\gamma'(s)|\, ds = L(\gamma). \tag{2.6}$$

Angenommen es ist $L(\gamma) \leq \pi$. Setze $p = \gamma(0)$ und $q = \gamma(L)$. Im Fall $\sphericalangle(p,q) < \pi$ können wir nach Drehung annehmen, dass p, q in der offenen Nordhalbsphäre symmetrisch zum Nordpol liegen. Aus Lemma 2.1 folgt dann $\langle \gamma(s), e_n \rangle \geq 0$ für alle $s \in [0,L]$. Die Ungleichung ist strikt für $s = 0, L$, Widerspruch zu (2.5). Im Fall $\sphericalangle(p,q) = \pi$ durchläuft γ nach Satz 1.3 einen Halbgroßkreis von p nach $q = -p$. Auch das ist nach (2.5) nicht möglich. □

Zum letzten Schluss: sei e die innere Normale der Halbebene, in der der Großhalbkreis liegt. Nach (2.5) gilt

$$0 = \Big\langle \int_0^L \gamma(s)\, ds\, ,\, e \Big\rangle = \int_0^L \underbrace{\langle \gamma(s), e \rangle}_{\geq 0}\, ds.$$

Es folgt $\langle \gamma(s), e \rangle = 0$ für alle $s \in [0, L]$, ein Widerspruch.

Für die Ungleichung von Fenchel werden die Argumente leicht modifiziert.

Beweis: (*Fenchel*) Mit $\gamma = c' : [0, L] \to \mathbb{S}^{n-1}$ gilt wie im Beweis von Satz 2.2

$$\int_0^L \gamma(s)\, ds = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^L \varkappa(s)\, ds = L(\gamma). \tag{2.7}$$

Sei nun $L(\gamma) \leq 2\pi$. Unterteile γ in $\gamma_0 = \gamma_{[0,s_0]}$ und $\gamma_1 = \gamma_{[s_0,L]})$ mit

$$L(\gamma_0) = L(\gamma_1) = \frac{1}{2} L(\gamma) \leq \pi,$$

und setze $p = \gamma(0)$, $q = \gamma(s_0)$. Wegen $c'(0) = c'(L)$ gilt auch $\gamma(L) = p$, also haben γ_0 und γ_1 dieselben Endpunkte (in anderer Reihenfolge). Im Fall $\sphericalangle(p, q) < \pi$ können wir nach Drehung annehmen, dass p, q in der offenen Nordhalbsphäre symmetrisch zum Nordpol liegen. Aus Lemma 2.1 folgt dann $\langle \gamma_k, e_n \rangle \geq 0$ für $k = 1, 2$, mit strikter Ungleichung für $s = 0, s_0, L$. Es folgt

$$\Big\langle \int_0^L \gamma(s)\, ds\,,\, e_n \Big\rangle = \int_0^{s_0} \langle \gamma_0(s), e_n \rangle\, ds + \int_{s_0}^L \langle \gamma_1(s), e_n \rangle\, ds > 0,$$

im Widerspuch zu (2.7). Also bleibt der Fall $\sphericalangle(p, q) = \pi$ bzw. $q = -p$. Die Ungleichung von Fenchel folgt dann aus Satz 1.3, und zwar ist

$$L(\gamma) = L(\gamma_0) + L(\gamma_1) \geq 2\pi.$$

Im Gleichheitsfall parametrisieren $\gamma_{0,1}$ Großhalbkreise. Die zugehörigen Halbebenen werden jeweils durch p und und die Integrale von γ_0 bzw. γ_1 aufgespannt. Aber nach (2.7) ist

$$\int_0^{s_0} \gamma_0(s)\, ds + \int_{s_0}^L \gamma_1(s)\, ds = \int_0^L \gamma(s)\, ds = 0.$$

Damit durchlaufen γ_0 und γ_1 nacheinander einen festen Großkreis, und $c(s)$ liegt in einer affinen Ebene, denn

$$c : [0, L] \to \mathbb{R}^n,\ c(s) = c(0) + \int_0^s \gamma(s')\, ds'.$$

Weiter zeigen wir, dass c einfach geschlossen ist. Andernfalls können wir annehmen, dass $c(s_1) = c(0)$ für ein $s_1 \in (0, L)$. Da c geschlossen ist, gilt auch $c(L) = c(s_1)$, und mit Satz 2.2 folgt

$$\int_0^L \varkappa(s)\, ds = \int_0^{s_1} \varkappa(s)\, ds + \int_{s_1}^L \varkappa(s)\, ds > \pi + \pi = 2\pi,$$

Widerspruch. Die Tatsache, dass im Gleichheitsfall c ein konvexes Gebiet berandet, werden wir im Abschnitt über ebene Kurven nachliefern. $\square$

Nach Arbeiten von Fary (1949) und Milnor (1950) gilt für Kurven, die verknotet sind, die stärkere Abschätzung

$$\int_0^L \varkappa(s)\, ds \geq 4\pi.$$

Der folgende Satz gibt eine wichtige und anschauliche Interpretation des Krümmungsvektors als Richtung des stärksten Abstiegs für die Bogenlänge.

Satz 2.3 (Erste Variation der Bogenlänge) *Sei $c \in C^2(I \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0), \mathbb{R}^n)$ mit $I = [a,b]$. Ist die Kurve $c = c(\cdot, 0)$ regulär, so gilt die Formel*

$$\frac{d}{d\varepsilon} L\big(c(\cdot,\varepsilon)\big)|_{\varepsilon=0} = -\int_I \big\langle \vec{\varkappa}, \phi \big\rangle\, ds + \big[\big\langle \vec{\tau}(t), \phi(t) \big\rangle\big]_{t=a}^{t=b} \quad \text{für } \phi = \frac{\partial c}{\partial \varepsilon}(\cdot, 0).$$

Dabei ist $\vec{\tau}$ Einheitstangente uns $\vec{\varkappa}$ Krümmungsvektor von c, und $ds = |c'(t)|\, dt$.

Beweis: Wir erhalten durch Differentiation unter dem Integral und partielle Integration

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\varepsilon} L\big(c(\cdot,\varepsilon)\big) &= \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b \Big| \frac{\partial c}{\partial t}(t,\varepsilon) \Big|\, dt|_{\varepsilon=0} \\
&= \int_a^b \Big\langle \tau(t), \frac{\partial^2 c}{\partial \varepsilon \partial t}(t,0) \Big\rangle\, dt \\
&= \int_a^b \big\langle \tau(t), \phi'(t) \big\rangle\, dt \\
&= -\int_a^b \big\langle \tau'(t), \phi(t) \big\rangle\, dt + \big[\big\langle \tau(t), \phi(t) \big\rangle\big]_{t=a}^{t=b}.
\end{aligned}$$

Aber es gilt für jede reguläre Kurve $c \in C^2(I, \mathbb{R}^n)$ mit $\tau = \frac{c'}{|c'|}$

$$\tau'(t) = \frac{c'' - \langle c'', \tau \rangle \tau}{|c'|} = \vec{\varkappa}\, |c'|.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Beispiel 2.4 Sei $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ reguläre Kurve von $p = c(a)$ nach $q = c(b)$, und c habe kleinste Länge unter allen solchen Kurven. Dann folgt $\varkappa = 0$ und c parametrisiert die Strecke von p nach q. Denn für alle $\phi \in C^2(I, \mathbb{R}^n)$ mit $\phi(a) = \phi(b) = 0$ folgt

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} L(c + \varepsilon\phi)|_{\varepsilon=0} = -\int_I \big\langle \vec{\varkappa}, \phi \big\rangle\, ds.$$

Nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung ist dann $\vec{\varkappa} = 0$.

Der Gradient einer Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$Df(x)\, v = \frac{d}{d\varepsilon} f(x + \varepsilon v)|_{\varepsilon=0} = \langle \nabla f(x), v \rangle_{\mathbb{R}^n}.$$

Für geschlossene Kurven können wir die erste Variation formal analog schreiben:

$$DL(c)\,\phi = \frac{d}{d\varepsilon} L(c + \varepsilon\phi)|_{\varepsilon=0} = -\big\langle \vec{\varkappa}, \phi \big\rangle_{L^2}.$$

Damit können wir $-\vec{\varkappa}$ als Gradient des Bogenlängenfunktionals bezüglich des L^2-Skalarprodukts interpretieren. Um Minima oder zumindest kritische Punkte der reellen Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ zu finden, kann man den sogenannten Gradientenfluss untersuchen, also Lösungen der Differentialgleichung $x'(t) = -\nabla f(x(t))$. Dem entspricht hier der sogenannte *curve shortening flow*

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\nabla_{L^2} L(c) = \vec{\varkappa}.$$

Die Kurve bewegt sich in Richtung minus L^2-Gradient der Bogenlänge. Gage und Grayson haben 1986/1987 gezeigt: Eine eingebettete Kurve bleibt unter dem Fluss eingebettet, und schrumpft in endlicher Zeit auf einen Punkt. Dabei wird sie vorm Verschwinden konvex und asymptotisch rund. Der curve shortening flow liefert also für eingebettete, geschlossene Kurven eine kanonische Deformation in einen Kreis, nach geeigneter Reskalierung.

3 Ebene Kurven und Umlaufzahl

In diesem Abschnitt betrachten wir Kurven im $\mathbb{R}^2$. Dies bedeutet, dass wir längs der Kurven eine eindeutige Einheitsnormale haben. Für geschlossene Kurven können wir zählen, wie oft ein Punkt umlaufen wird, wenn er nicht von der Kurve getroffen wird. Auf diese Weise kommt hier Topologie ins Spiel.

Definition 3.1 *Sei $c \in C^1(I,\mathbb{R}^n)$ eine reguläre Kurve. Eine stetige Einheitsnormale längs c ist eine Abbildung $\nu \in C^0(I,\mathbb{R}^n)$ mit*

$$|\nu(t)| = 1 \text{ und } \langle c'(t), \nu(t)\rangle = 0 \quad \text{für alle } t \in I.$$

Lemma 3.1 *Längs einer ebenen, regulären Kurve $c \in C^1(I,\mathbb{R}^2)$ gibt es genau zwei stetige Einheitsnormalen, und zwar sind das*

$$\nu = \pm J\tau \quad \text{mit } \tau = \frac{c'}{|c'|} \text{ und } J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Hier ist das Vorzeichen $+$ bzw. $-$ dasselbe für alle $t \in I$.

$J \in \mathbb{SO}(2)$ ist die Drehung um den Winkel $\frac{\pi}{2}$. Identifizieren wir $z = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, so ist $Jz = iz$ mit $i = \sqrt{-1}$.

Beweis: $J\tau$ ist stetig und es gilt $|J\tau| = |\tau| = 1$ sowie $\langle J\tau, \tau\rangle = 0$. Also ist $\nu = \pm J\tau$ stetige Einheitsnormale längs c. Zur Eindeutigkeit: ist ν stetige Einheitsnormale längs c, so gilt, da $c'(t)^\perp$ eindimensional ist,

$$\langle \nu(t), J\tau(t)\rangle = \pm 1 \quad \text{für alle } t \in I.$$

Aus Stetigkeitsgründen ist entweder $\nu = J\tau$ oder $\nu = -J\tau$ auf ganz I. □

Aus $c \in C^k(I,\mathbb{R}^2)$ folgt $\nu \in C^{k-1}(I,\mathbb{R}^2)$, dies ergibt sich direkt aus (3.1). Wir haben nun die Möglichkeit, für ebene Kurven eine Krümmung mit Vorzeichen zu definieren.

Definition 3.2 *Sei $c \in C^2(I,\mathbb{R}^2)$ regulär, und ν sei stetige Einheitsnormale längs c. Die Krümmung von c in Richtung ν ist die Funktion, vgl. (2.3),*

$$\varkappa : I \to \mathbb{R}, \quad \varkappa(t) = \langle \vec{\varkappa}(t), \nu(t)\rangle = \frac{\langle c''(t), \nu(t)\rangle}{|c'(t)|^2}.$$

Beispiel 3.1 Wir testen die Definition für Kreise

$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ c(t) = r\big(\cos t, \sin t).$$

Wähle $\nu(t) = -(\cos t, \sin t)$. Mit $c''(t) = -r(\cos t, \sin t)$ und $|c'(t)| = r$ folgt

$$\varkappa(t) = \frac{1}{r}.$$

Für einen Kreis ist die Krümmung positiv in Richtung der inneren Normale, in Richtung der äußeren Normale ist sie negativ.

Beispiel 3.2 Betrachte eine als Graph gegebene Kurve

$$c : I \to \mathbb{R}^2,\, c(x) = \big(x, u(x)\big).$$

Wir haben dann längs c die nach oben weisende Einheitsnormale

$$\nu(x) = \frac{(-u'(x), 1)}{\sqrt{1 + u'(x)^2}}.$$

Mit $|c'(x)|^2 = 1 + u'(x)^2$ erhalten wir die Formel

$$\varkappa(x) = \frac{u''(x)}{\big(1 + u'(x)^2\big)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nach Definition ist die Krümmung positiv in Richtung des Krümmungsvektors, also anschaulich in der Richtung, in der die Kurve sich biegt. Um das präziser zu machen, sei $c \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit Einheitsnormale ν und zugehöriger Krümmung $\varkappa$. Betrachte für $s_0 \in I$ die Halbebenen

$$\begin{aligned} E^+ &= \{z \in \mathbb{R}^2 : \langle z - c(s_0), \nu(s_0)\rangle > 0\} \\ E^- &= \{z \in \mathbb{R}^2 : \langle z - c(s_0), \nu(s_0)\rangle < 0\} \end{aligned}$$

Mit $h(s) = \langle c(s) - c(s_0), \nu(s_0)\rangle$ gilt:

$$h(s) > 0 \;\text{(bzw. } h(s) < 0) \quad \Leftrightarrow \quad c(s) \in E^+ \;\text{(bzw. } c(s) \in E^-).$$

Berechne nun $h(s_0) = 0$, $h'(s_0) = \langle c'(s_0), \nu(s_0)\rangle = 0$ und $h''(s_0) = \langle c''(s_0), \nu(s_0)\rangle = \varkappa(s_0)$, also

$$h(s) = \frac{1}{2}\varkappa(s_0)(s - s_0)^2 + o(|s - s_0|^2).$$

Aus dieser Entwicklung folgt

$$\begin{aligned} \varkappa(s_0) > 0 \quad &\Rightarrow \quad c(s) \in E^+ \text{ für } s \text{ nahe } s_0, \\ \varkappa(s_0) < 0 \quad &\Rightarrow \quad c(s) \in E^- \text{ für } s \text{ nahe } s_0. \end{aligned}$$

Lemma 3.2 *Sei $c \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$ reguläre Kurve mit Einheitsnormale ν und zugehöriger Krümmung $\varkappa$.*

(a) *Ist $F(z) = Sz + a$ eine Euklidische Bewegung, also $S \in \mathbb{O}(2)$ und $a \in \mathbb{R}^2$, so ist $S\nu$ Einheitsnormale längs $F \circ c$, auch mit zugehöriger Krümmung $\varkappa$.*

(b) *Sei $c \circ \varphi$ eine Umparametrisierung mit $\varphi \in C^2(J, I)$. Dann ist $\nu \circ \varphi$ Einheitsnormale längs $c \circ \varphi$ mit zugehöriger Krümmung $\varkappa \circ \varphi$.*

Beweis: (a): Es gilt $|S\nu| = |\nu| = 1$ und $\langle (F \circ c)', S\nu\rangle = \langle Sc', S\nu\rangle = 0$, also ist $S\nu$ Einheitsnormale längs $F \circ c$. Berechne nun

$$\frac{\langle (F \circ c)'', S\nu\rangle}{|(F \circ c)'|^2} = \frac{\langle Sc'', S\nu\rangle}{|Sc'|^2} = \langle c'', \nu\rangle = \varkappa.$$

(b): Wegen $(c \circ \varphi)' = (c' \circ \varphi)\,\varphi'$ ist klar, dass $\nu \circ \varphi$ eine Einheitsnormale längs $c \circ \varphi$ ist. Wir berechnen

$$\Big\langle \frac{(c\circ\varphi)''}{|(c\circ\varphi)'|^2}, \nu\circ\varphi \Big\rangle = \Big\langle \frac{c''}{|c'|^2}, \nu \Big\rangle \circ \varphi = \varkappa \circ \varphi.$$

□

Bemerkung. Viele Autoren legen sich auf die Normale $\nu = J\tau$ fest und haben damit eine eindeutige Funktion $\varkappa$. Das Vorzeichen von $\varkappa$ ändert sich dann unter Umparametrisierungen mit Richtungsumkehr, und auch unter Spiegelungen.

Wir wollen nun für geschlossene Kurven $c : [a,b] \to \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ zählen, wir oft der Nullpunkt umlaufen wird. Anschaulich scheint das eine klare Sache zu sein, aber das mathematische Konzept ist nicht trivial. Ausnahmsweise geben wir erst die Definition, und motivieren sie dann im Anschluss.

Definition 3.3 (Umlaufzahl) *Sei $c : [a,b] \to \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ eine geschlossene stückweise C^1-Kurve. Die Umlaufzahl von c um den Nullpunkt ist*

$$n(c,0) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \Big\langle \frac{Jc(t)}{|c(t)|^2}, c'(t) \Big\rangle\, dt \in \mathbb{R}.$$

Die Existenz des Integrals ist klar, es schließen sich aber einige Fragen an:

(a) Wie kommt man auf diese Formel?

(b) Ist $n(c,0)$ eine ganze Zahl?

(c) Kann die Umlaufzahl auch für c nur stetig definiert werden?

Eine Antwort auf (a) gibt das folgende Lemma.

Lemma 3.3 (Polardarstellung) *Die Kurve $c : [a,b] \to \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ sei in Polarkoordinaten gegeben, also $c(t) = r(t)(\cos\theta(t), \sin\theta(t))$ mit stückweise C^1-Funktionen $r(t) > 0$ und $\theta(t) \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\big[\theta(t)\big]_{t=a}^{t=b} = \int_a^b \Big\langle \frac{Jc(t)}{|c(t)|^2}, c'(t) \Big\rangle\, dt.$$

Ist c zusätzlich geschlossen, so folgt

$$n(c,0) = \frac{1}{2\pi}\big[\theta(t)\big]_{t=a}^{t=b} \in \mathbb{Z}.$$

Beweis: Wir berechnen

$$\begin{aligned} c'(t) &= r'(t)(\cos\theta(t), \sin\theta(t)) + r(t)\theta'(t)(-\sin\theta(t), \cos\theta(t)) \\ &= \frac{r'(t)}{r(t)}\, c(t) + \theta'(t) Jc(t). \end{aligned}$$

Wir nehmen das Skalarprodukt mit $Jc(t)$ und erhalten mit $c(t) = (x(t), y(t))$

$$\theta' = \Big\langle \frac{Jc}{|c|^2}, c' \Big\rangle = \frac{xy' - x'y}{x^2+y^2}. \tag{3.2}$$

Mit dem Hauptsatz folgt die erste Aussage. Ist c geschlossen, so ist $r(a) = r(b)$ und $e^{i\theta(a)} = e^{i\theta(b)}$, das heißt $\theta(b) - \theta(a) \in 2\pi\mathbb{Z}$. Dies beweist die zweite Aussage. $\square$

Es ist praktisch, hier $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ zu identifizieren. Wir zeigen nun, dass jede stückweise C^1-Kurve in $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ eine solche Polardarstellung hat. Insbesondere folgt $n(c,0) \in \mathbb{Z}$ in Definition 3.3, Frage (b) ist geklärt.

Satz 3.1 (Existenz eines Lifts) *Sei $c : I = [a,b] \to \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ stückweise C^1. Dann gibt es eine Funktion $\theta \in C^0(I)$, so dass gilt:*

$$c(t) = r(t)e^{i\theta(t)} \quad \text{für alle } t \in [a,b], \quad \text{wobei } r(t) = |c(t)|. \tag{3.3}$$

θ ist eindeutig bis auf Addition einer Konstanten in $2\pi\mathbb{Z}$, und stückweise C^1.

Beweis: Zu $t_0 \in I$ wähle $\theta_0 \in \mathbb{R}$ mit $c(t_0) = r(t_0)e^{i\theta_0}$, und definiere

$$\theta : I \to \mathbb{R},\ \theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} \Big\langle \frac{Jc(\tau)}{|c(\tau)|^2}, c'(\tau) \Big\rangle\, d\tau. \tag{3.4}$$

θ ist stückweise C^1, und es ergibt sich

$$c' = \Big\langle c', \frac{c}{|c|} \Big\rangle \frac{c}{|c|} + \Big\langle c', \frac{Jc}{|c|} \Big\rangle \frac{Jc}{|c|} = \Big(\frac{r'}{r} + i\theta'\Big)\, c.$$

Andererseits gilt für Kurve $\tilde{c}(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$ wie oben berechnet

$$\tilde{c}' = \frac{r'}{r}\tilde{c} + \theta'\, J\tilde{c} = \Big(\frac{r'}{r} + i\theta'\Big)\, \tilde{c}.$$

Damit folgt

$$\Big(\frac{\tilde{c}}{c}\Big)' = \frac{\tilde{c}'c - \tilde{c}c'}{c^2} = 0,$$

also $c = \tilde{c}$ wegen $c(t_0) = \tilde{c}(t_0)$. Damit ist die Existenz gezeigt. Sind nun $\theta_k \in C^0([a,b])$, $k = 1,2$, mit (3.3), so folgt durch komplexe Division

$$e^{i(\theta_1(t) - \theta_2(t))} = 1 \quad \text{für alle } t \in [a,b].$$

Da $\theta_1 - \theta_2$ stetig, gibt es ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $\theta_1(t) - \theta_2(t) = 2\pi n$ für alle $t \in [a,b]$. $\square$

Bemerkung. In komplexer Notation gilt für $c(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$

$$\frac{c'}{c} = \frac{\overline{c}c'}{|c|^2} = \frac{xx' + yy' + i(xy' - x'y)}{x^2 + y^2} = \frac{r'}{r} + i\theta'.$$

Mit Integration folgt für das komplexe Kurvenintegral

$$\int_c \frac{dz}{z} = \int_a^b \frac{c'(t)}{c(t)}\, dt = \big[\log r(t) + i\theta(t)\big]_{t=a}^{t=b}. \tag{3.5}$$

Für c geschlossen ist $r(b) = r(a)$, dann steht rechts $2\pi i\, n(c,0)$.

Wir zeigen jetzt, dass die Umlaufzahl von C^0-nahen Kurven gleich ist.

Lemma 3.4 *Seien $c_{0,1} : I \to \mathbb{R}^2$ geschlossen und stückweise C^1, und es gelte $c_0(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Ist dann*

$$(3.6) \qquad |c_1(t) - c_0(t)| < |c_0(t)| \quad \text{für alle } t \in I,$$

so folgt auch $c_1(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ und $n(c_1, 0) = n(c_0, 0)$.

Beweis: Nach Dreiecksungleichung und Voraussetzung gilt

$$|c_1(t)| \geq |c_0(t)| - |c_0(t) - c_1(t)| > 0.$$

Wir betrachten die affine Homotopie zwischen c_0 und c_1,

$$c \in C^0([0,1] \times I, \mathbb{R}^2),\ c(s,t) = (1-s)c_0(t) + sc_1(t).$$

Die $c(s,\cdot)$ sind geschlossen und stückweise C^1, und nach Voraussetzung gilt

$$|c(s,t) - c_0(t)| = s\,|c_1(t) - c_0(t)| < |c_0(t)| \quad \text{für alle } (s,t) \in [0,1] \times I,$$

insbesondere $|c(s,t)| > 0$. Somit ist die Umlaufzahl von $c(s,\cdot)$ definiert:

$$n(c(s,\cdot),0) = \frac{1}{2\pi} \int_I \Big\langle \frac{Jc(s,t)}{|c(s,t)|^2}, (1-s)c_0'(t) + sc_1'(t) \Big\rangle\, dt \in \mathbb{Z}.$$

Sind die $c_{0,1}$ in C^1, so ist der Integrand stetig auf $[0,1] \times I$; dann ist $s \mapsto n(c(s,\cdot))$ stetig als Parameterintegral. Sind die $c_{0,1}$ nur stückweise C^1, so hängen die Integrale über jedes Teilintervall $[t_{j-1}, t_j]$ stetig von s ab, und $n(c(s,\cdot),0)$ ist als Summe dieser Integrale auch stetig. Somit ist $n(c(s,\cdot),0)$ konstant und $n(c_1,0) = n(c_0,0)$. □

Nach dem Residuensatz kann die Zahl $N(f,G)$ der Nullstellen (mit Vielfachheit) einer holomorphen Funktion $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ als Randintegral berechnet werden. Dabei ist vorausgesetzt, dass $f(z) \neq 0$ auf ∂G. Hat zum Beispiel ∂G nur eine Komponente, die durch $\gamma : I \to \partial G$ parametrisiert ist, so lautet die Formel

$$N(f,G) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_I \frac{(f \circ \gamma)'}{f \circ \gamma}\, dt = n(f \circ \gamma, 0).$$

Der letzte Schritt gilt nach (3.5). Ist $g(z)$ eine weitere holomorphe Funktion mit $|g(z) - f(z)| < |f(z)|$ auf ∂G, so erfüllen $f \circ \gamma$ und $g \circ \gamma$ die Bedingung (3.6), also folgt aus Lemma 3.4

$$N(f,G) = n(f \circ \gamma, 0) = n(g \circ \gamma, 0) = N(g,G),$$

die Funktionen haben gleichviele Nullstellen in G (Satz von Rouché).

Satz 3.2 (Homotopieinvarianz) *Sei $c : [0,1] \times [a,b] \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ stetig, Die Kurven $c(s,\cdot)$ seien geschlossen und stückweise C^1. Dann ist $s \mapsto n(c(s,\cdot),0)$ konstant.*

Beweis: Für $s_0 \in [0,1]$ setze $\varrho := \min_{t\in I} |c(s_0,t)|$. Dann ist $\varrho > 0$, und für $s \in [0,1]$ hinreichend nahe bei s_0 gilt

$$\|c(s,\cdot) - c(s_0,\cdot)\|_{C^0(I)} < \varrho.$$

Damit ist Voraussetzung (3.6) erfüllt, es folgt $n(c(s,\cdot),0) = n(c(s_0,\cdot),0)$. Somit ist $n(c(s,\cdot),0)$ lokal konstant auf $[0,1]$, also konstant. □

Bisher haben wir die Umlaufzahl bezüglich des Nullpunkts betrachtet, jetzt verallgemeinern wir das auf Punkte $p \in \mathbb{R}^2 \backslash c(I)$.

Folgerung 3.1 (Lokalkonstanz) *Sei $c : I = [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine geschlossene, stückweise C^1- Kurve. Dann ist die Funktion*

$$n(c,\cdot) : \mathbb{R}^2\backslash c(I) \to \mathbb{Z}, \quad n(c,p) := n(c-p,0),$$

auf den Komponenten von $\mathbb{R}^2\backslash c(I)$ konstant.

Beweis: Wir zeigen, dass $n(c,\cdot)$ längs eines stetigen Wegs $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2\backslash c(I)$ konstant ist. Da $\mathbb{R}^2\backslash c(I)$ offen ist, stimmen Komponenten mit Wegkomponenten überein, und der Satz ist bewiesen. Betrachte

$$c : [0,1] \times I \to \mathbb{R}^2\backslash\{0\},\ c(s,t) = c(t) - \gamma(s).$$

Die Kurven $c(s,\cdot)$ sind geschlossen und stückweise C^1, und $c(s,t)$ ist stetig. Nach Satz 3.2 ist dann $n(c,\gamma(s)) = n(c-\gamma(s),0) = n(c(s,\cdot),0)$ konstant. □

Beispiel 3.3 Für $c : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $c(t) = e^{ikt}$ mit $k \in \mathbb{Z}$, gilt

$$n(c,p) = \begin{cases} k & \text{falls } |p| < 1 \\ 0 & \text{falls } |p| > 1. \end{cases}$$

Wir berechnen das mit der komplexen Darstellung, siehe oben. Einerseits ist

$$n(c,0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{ike^{ikt}}{e^{ikt}}\,dt = k.$$

Andererseits gilt für $|p| \geq R > 1$ die Abschätzung

$$|n(c,p)| = |n(c-p,0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|c'(t)|}{|c(t)-p|}\,dt \leq \frac{|k|}{R-1} \to 0 \text{ mit } R \to \infty.$$

Die Behauptung ergibt sich nun aus Folgerung 3.1.

Jetzt zur Frage (c). Die Umlaufzahl kann auch für geschlossene, nur stetige Kurven $c : I \to \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ definiert werden, und zwar setzen wir

$$n(c,0) = \lim_{k\to\infty} n(c_k,0) \quad \text{wobei } c_k \text{ stückweise } C^1 \text{ mit } \|c_k - c\|_{C^0(I)} \to 0.$$

Um dies zu rechtfertigen, ist erstmal die Existenz einer solchen Folge c_k zu zeigen. Betrachte für $a = t_0 < \ldots < t_k = b$ die stückweise lineare Approximation

$$c_k(t) = \frac{t_j - t}{t_j - t_{j-1}}\, c(t_{j-1}) + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}\, c(t_j) \quad \text{für } t \in [t_{j-1}, t_j].$$

Mit $\Delta_k = \max_j (t_j - t_{j-1}) \to 0$ gilt, da c gleichmäßig stetig ist,

$$\|c_k - c\|_{C^0(I)} \leq \operatorname{osc}\big(c, \Delta_k\big) \to 0 \quad \text{für } k \to \infty.$$

Zweitens ist zu begründen, dass der Grenzwert der Folge $n(c_k, 0)$ existiert und nicht von der Wahl der Folge c_k abhängt. Dazu zeigen wir für $\varepsilon > 0$ geeignet: sind $c_i : I \to \mathbb{R}^2$, $i = 0, 1$, stückweise C^1 mit $\|c_i - c\|_{C^0(I)} < \varepsilon$, so sind die $n(c_i, 0)$ definiert und gleich. Es gilt

$$\begin{aligned} |c_i(t)| &\geq |c(t)| - |c(t) - c_i(t)| \geq \varrho - \varepsilon \quad \text{wobei } \varrho := \min_{t \in I} |c(t)| > 0, \\ \|c_1 - c_0\|_{C^0(I)} &\leq \|c_1 - c\|_{C^0(I)} + \|c - c_0\|_{C^0(I)} < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Mit $\varepsilon = \varrho/3$ folgt $n(c_1, 0) = n(c_0, 0)$ aus Lemma 3.4, und $n(c, 0)$ ist wohldefiniert.

Satz 3.3 (C^0-Homotopieinvarianz) *Sei $c : [0,1] \times I \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ stetig. Die Kurven $c(s, \cdot)$ seien geschlossen. Dann ist $s \mapsto n(c(s, \cdot))$ konstant.*

Dies folgt durch Modifikation des obigen Arguments, wir überlassen die Ausführung den Leser/innen. Zum Schluss des Kapitels stellen wir noch fest, dass sich die Umlaufzahl bei Bewegungen und Umparametrisierungen wie erwartet verhält, Beweis ebenfalls als Übungsaufgabe.

Lemma 3.5 (Bewegungen) *Sei $c : I \to \mathbb{R}^2 \backslash \{p\}$ stetig und geschlossen. Ist $F(z) = Sz + a$ mit $S \in \mathbb{O}(2)$ und $a \in \mathbb{R}^2$, so gilt*

$$n(F \circ c, F(p)) = (\det S)\, n(c, p).$$

Beweis: Ist c stückweise C^1, so gilt wegen $JS = (\det S) SJ$

$$\begin{aligned} 2\pi\, n(F \circ c, F(p)) &= \int_I \Big\langle \frac{J(F \circ c - F(p))}{|F \circ c - F(p)|^2}, (F \circ c)' \Big\rangle \, dt \\ &= \int_I \Big\langle \frac{JS(c - p)}{|c - p|^2}, Sc' \Big\rangle \, dt \\ &= (\det S) \int_I \Big\langle \frac{J(c - p)}{|c - p|^2}, c' \Big\rangle \, dt \\ &= 2\pi \, (\det S)\, n(c, p). \end{aligned}$$

Ist c nur stetig, so wähle $c_k \to c$ gleichmäßig mit c_k stückweise C^1. Es folgt dann

$$n(F \circ c, F(p)) = \lim_{k \to \infty} n(F \circ c_k, F(p)) = (\det S) \lim_{k \to \infty} n(c_k, p) = (\det S)\, n(c, p).$$

$\square$

Lemma 3.6 (Umparametrisierungen) *Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2 \backslash \{p\}$ stetig und geschlossen, und $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ stetig und bijektiv. Dann gilt, je nach Orientierung von φ,*

$$n(c \circ \varphi, p) = \pm n(c, p).$$

Beweis: Sind φ, c stückweise C^1, so auch $c \circ \varphi$. Mit Substitution $s = \varphi(t)$ folgt

$$\begin{aligned} 2\pi\, n(c \circ \varphi, p) &= \int_\alpha^\beta \Big\langle \frac{J(c \circ \varphi - p)}{|c \circ \varphi - p|^2}, (c \circ \varphi)' \Big\rangle \, dt \\ &= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \Big\langle \frac{J(c - p)}{|c - p|^2}, c' \Big\rangle \, ds \\ &= \pm 2\pi\, n(c, p). \end{aligned}$$

Für c, φ stetig wähle die stückweise linearen Approximationen c_k, φ_k. Die φ_k sind wieder bijektiv, und $c_k \circ \varphi_k \to c \circ \varphi$ gleichmäßig auf $[\alpha, \beta]$. Es folgt

$$n(c \circ \varphi, p) = \lim_{k \to \infty} n(c_k \circ \varphi_k, p) = \pm \lim_{k \to \infty} n(c_k, p) = \pm n(c, p).$$

$\square$

4 Zwei Anwendungen der Umlaufzahl

Wir beginnen mit dem Jordanschen Kurvensatz. Stellen Sie sich vor, Sie sind auf dem Land, zu allen Seiten nichts als Gras und Weidezäune. Da taucht irgendwo hinten ein Bulle auf. Sind Sie auf seiner Weide? Jeder Zaun hat zwei Seiten, innen und außen. Daher ist es besser, wenn Sie und der Bulle durch eine ungerade Zahl von Zäunen getrennt sind. Der Jordansche Kurvensatz besagt, dass tatsächlcih jede einfach geschlossene, ebene Kurve ein innen und ein außen hat. Anschaulich ist das natürlich völlig klar. Wir beweisen den Satz hier für reguläre C^1-Kurven, weil die lokale Situation dann leicht zu verstehen ist.

Definition 4.1 *Eine geschlossene Kurve $c \in C^0([a,b],\mathbb{R}^2)$ heißt einfach geschlossen, falls ihre Einschränkung auf $[a,b)$ injektiv ist.*

Lemma 4.1 *Sei $c \in C^1(I,\mathbb{R}^2)$ eine einfach C^1-geschlossene Kurve, die nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Setze $C = \mathrm{Bild}(c)$. Dann gibt es zu jedem s_0 eine offene Umgebung W_{s_0} von $c(s_0)$ mit folgenden Eigenschaften:*

(1) *$W_{s_0}\backslash C$ ist disjunkte Vereinigung von zwei Gebieten $W_{s_0}^{\pm}$,*

(2) *$(\partial W_{s_0}^{\pm}) \cap W_{s_0} = C \cap W_{s_0}$,*

Beweis: Indem wir c auf $\mathbb{R}$ fortsetzen mit Periode $L := |I|$, können wir $s_0 = 0$ annehmen. Setze $\nu(0) := Jc'(0)$ und betrachte für $\delta > 0$

$$f : (-2\delta, 2\delta) \times (-\delta,\delta) \to \mathbb{R}^2,\ f(s,t) = c(s) + t\nu(0).$$

f ist stetig differenzierbar mit $Df(0,0) \in \mathbb{O}(2)$. Wähle $\delta \in (0, L/2)$ so klein, dass f Diffeomorphismus auf sein Bild ist. Wir zeigen dass $W_0 := f((-\delta,\delta)\times(-\varepsilon,\varepsilon))$ für $\varepsilon \in (0,\delta)$ klein die geforderten Eigenschaften hat. Als erstes behaupten wir

$$c(s) \in W_0,\ s \in [-L/2, L/2] \quad \Leftrightarrow \quad s \in (-\delta,\delta). \tag{4.1}$$

Aus $s \in (-\delta,\delta)$ folgt $c(s) = f(s,0) \in W_0$ und $|s| < L/2$. Angenommen „$\Rightarrow$“ ist falsch für $\varepsilon_i \searrow 0$. Dann gibt es $s_i \in [-L/2, L/2]$ mit $|s_i| \geq \delta$ und $c(s_i) \in W_0$, also $c(s_i) = f(\tilde{s}_i, t_i)$ mit $|\tilde{s}_i| < \delta$ und $|t_i| < \varepsilon_i$. Dann ist sogar $|s_i| \geq 2\delta$, denn sonst ist $f(\tilde{s}_i, t_i) = c(s_i) = f(s_i, 0)$ im Widerspruch zu f injektiv. Nach Wahl von Teilfolgen gilt $s_i \to s$ mit $2\delta \leq |s| \leq L/2$, und $\tilde{s}_i \to \tilde{s} \in [-\delta,\delta]$. Es folgt

$$c(s) = \lim_{i\to\infty} c(s_i) = \lim_{i\to\infty} f(\tilde{s}_i, t_i) = f(\tilde{s}, 0) = c(\tilde{s}),$$

im Widerspruch zu c einfach. Damit ist (4.1) gezeigt, insbesondere gilt $C \cap W_0 = f((-\delta,\delta)\times\{0\})$. Es folgt $W_0\backslash C = W_0^+ \cup W_0^-$ für

$$W_0^+ = f\big((-\delta,\delta)\times(0,\varepsilon)\big) \quad \text{und} \quad W_0^- = f\big((-\delta,\delta)\times(-\varepsilon,0)\big).$$

Da f diffeomorph, ist $\partial W_0^{\pm}$ Bild des Randes von $(-\delta,\delta)\times(0,\pm\varepsilon)$, somit folgt

$$(\partial W_0^{\pm}) \cap W_0 = f\big((-\delta,\delta)\times\{0\}\big) = C \cap W_0.$$

$\square$

Satz 4.1 (Jordanscher Kurvensatz) *Sei $c \in C^1(I, \mathbb{R}^2)$ eine einfach geschlossene Kurve, die nach der Bogenlänge parametrisiert und C^1-geschlossen ist, und sei $C = \mathrm{Bild}(c)$. Dann ist $\mathbb{R}^2 \backslash C$ disjunkte Vereinigung eines beschränkten Gebiets U und eines unbeschränkten Gebiets V mit $\partial U = \partial V = C$.*

Beweis: Wir nehmen wieder an, dass c als C^1-Kurve fortgesetzt ist mit Periode $L = |I|$. Für jede Komponente U von $\mathbb{R}^2 \backslash C$ ist ∂U eine abgeschlossene, nichtleere Teilmenge von C. Nach Lemma 4.1(1) gilt für $c(s_0) \in \partial U$ eine der Alternativen

$$(4.2)\quad U \cap W_{s_0} = W_{s_0}^+ \quad \text{oder} \quad U \cap W_{s_0} = W_{s_0}^- \quad \text{oder} \quad U \cap W_{s_0} = W_{s_0}^+ \cup W_{s_0}^-.$$

Mit Lemma 4.1(2) folgt $\partial U \cap W_{s_0} = C \cap W_{s_0}$, das heißt ∂U ist offen in C und somit $\partial U = C$, da C zusammenhängend ist. Insbesondere zeigt (4.2), dass $\mathbb{R}^2 \backslash C$ höchstens zwei Komponenten besitzt. Wähle $R > 0$ mit $C \subset K_R(0) = \{p \in \mathbb{R}^2 : |p| \leq R\}$. Da $\mathbb{R}^2 \backslash K_R(0)$ zusammenhängend ist, hat $\mathbb{R}^2 \backslash C$ genau eine unbeschränkte Komponente V. Außerdem ist c homotop zur Punktkurve $c_0(s) \equiv 0$ in $K_R(0)$. Es folgt $n(c,p) = 0$ zunächst für $|p| > R$, und dann für alle $p \in V$ nach Folgerung 3.1. Der Satz ist also bewiesen, wenn wir zeigen:

Es gibt ein $q \in \mathbb{R}^2 \backslash C$ mit $n(c,q) \neq 0$.

Für $s_0 = 0$ sei $f|(-\delta,\delta) \times (-\varepsilon,\varepsilon) \to W_0$ die in Lemma 4.1 definierte Abbildung. Betrachte für $0 < \varrho < \varepsilon$ die $p = c(0) = f(0,0)$, $p_\pm = f(0, \pm\varrho/2)$ sowie die Kurven

$$c_\pm(s) = \begin{cases} c(s) & \text{für } s \in [-L/2, L/2] \backslash [-\varrho, \varrho] \\ f\Big(\varrho \exp\big(\pm \frac{i\pi}{2}(1 - \frac{s}{\varrho})\big)\Big) & \text{für } s \in [-\varrho, \varrho]. \end{cases}$$

Hier wird das Intervall $(varrho, \varrho)$ durch den oberen bzw. unteren Halbkreis ersetzt, jeweils verkettet mit f. Es folgt $n(c, p_\pm) = n(c_\mp, p_\pm)$, denn die affine Homotopie deformiert die Halbkreise in das Intervall bei festen Endpunkten. Mit $\lambda \in [0,1]$ lautet sie

$$h_\mp(\lambda, s) = \begin{cases} c(s) & \text{für } s \in [-L/2, L/2] \backslash [-\varrho, \varrho] \\ f\Big((1-\lambda)\,(s,0) + \lambda\,\varrho \exp\big(\mp \frac{i\pi}{2}(1 - \frac{s}{\varrho})\big)\Big) & \text{für } s \in [-\varrho, \varrho]. \end{cases}$$

Da p und $p_\pm$ in $f(B_\varrho(0))$ verbindbar sind, also in derselben Komponente von $\mathbb{R}^2 \backslash c_\pm(I)$, gilt weiter $n(c_\mp, p_\pm) = n(c_\mp, p)$ nach Folgerung 3.1. Also erhalten wir

$$n(c,p_+) - n(c,p_-) = \frac{1}{2\pi}\Big(\int_I \Big\langle \frac{Jc_-'}{|c_- - p|^2}, c_-' \Big\rangle\, ds - \int_I \Big\langle \frac{Jc_+'}{|c_+ - p|^2}, c_+' \Big\rangle\, ds \Big) = n(f \circ \gamma, p),$$

wobei $\gamma(t) = \varrho e^{it}$ für $t \in [-\pi, \pi]$. Aber man sieht leicht

$$n(f \circ \gamma, p) = n(F \circ \gamma, p) \quad \text{für } F(z) = p + Df(0,0)z,$$

und zwar mit der affinen Homotopie $h(\lambda,t) = (1-\lambda) f(\gamma(t)) + \lambda F(\gamma(t))$, für $0 \leq \lambda \leq 1$. Nach Konstruktion in Lemma 4.1 ist $Df(0,0) \in \mathbb{O}(2)$, also folgt für $\varrho > 0$ hinreichend klein

$$\begin{aligned} |h(\lambda,t) - p| &= \big|F(\gamma(t)) - p + (1-\lambda)\big(f(\gamma(t)) - F(\gamma(t))\big)\big| \\ &\geq |Df(0,0)\gamma(t)| - \big|f(\gamma(t)) - F(\gamma(t))\big| \\ &\geq \varrho - \max_{|z| \leq \varrho} |f(z) - F(z)| > 0. \end{aligned}$$

Schließlich ist $F \circ \gamma$ ein einfach durchlaufener Kreis um p, und

$$n(c, p_+) - n(c, p_-) = n(f \circ \gamma, p) = n(F \circ \gamma, p) = \pm 1. \tag{4.3}$$

Da einer der Punkte $p_\pm$ in V liegt, folgt $n(c, p_+) = \pm 1$ oder $n(c, p_-) = \mp 1$. $\square$

Zur zweiten Anwendung. Ist $c \in C^1(I, \mathbb{R}^2)$, $I = [a, b]$, regulär und C^1-geschlossen, so ist $c' \in C^0(I, \mathbb{R}^2)$ eine stetige, geschlossene Kurve in $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$. Ihre Umlaufzahl

$$n(c', 0) =: \operatorname{ind}(c) \in \mathbb{Z} \tag{4.4}$$

heißt Rotationsindex von c (auch: Tangentenumlaufzahl). Für $c \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$ gilt

$$\operatorname{ind}(c) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \Big\langle \frac{Jc'}{|c'|^2}, c'' \Big\rangle \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_I \varkappa \, ds, \tag{4.5}$$

mit Krümmung $\varkappa$ in Richtung Jc', siehe Definition 3.2, und $ds = |c'(t)|\, dt$.

Lemma 4.2 (Invarianzen) *Sei c eine C^1-geschlossene, reguläre Kurve in $\mathbb{R}^2$.*

(a) *Ist $F(z) = Sz + a$ eine Bewegung, so gilt* $\operatorname{ind}(F \circ c) = (\det S) \operatorname{ind}(c)$.

(b) *Ist $c \circ \varphi$ eine C^1-Umparametrisierung mit $\varphi' \neq 0$, so gilt* $\operatorname{ind}(c \circ \varphi) = \pm \operatorname{ind}(c)$, *je nach Orientierung von φ.*

Ein k-mal durchlaufener Kreis hat Rotationsindex $\pm k$, die Kurve ∞ hat dagegen Rotationsindex Null. Der folgende Satz besagt, dass eine Kurve mit Index ungleich ± 1 Selbstschnitte haben muss.

Satz 4.2 (Umlaufsatz von H. Hopf) *Sei $c \in C^1(I, \mathbb{R}^2)$ reguläre, einfach C^1-geschlossene Kurve. Dann gilt*

$$\operatorname{ind}(c) = \pm 1.$$

Beweis: Sei $R = \max_{t \in I} |c(t)|$. Nach Drehung können wir $(R, 0) \in \mathrm{Bild}(c)$ annehmen. Wir parametrisieren dann so nach der Bogenlänge, dass $c(0) = (R, 0)$ und $c'(0) = (0, 1)$. Die Idee ist nun, die Kurve c' in gewisse Kurven von Sekanten zu deformieren. Genauer wird auf der Menge $D = \{(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq s_1 \leq s_2 \leq L\}$ folgende Abbildung betrachtet:

$$\omega : D \to \mathbb{S}^1,\ \omega(s_1, s_2) = \begin{cases} c'(s) & \text{für } s_1 = s_2 = s \in [0, L], \\ \dfrac{c(s_2) - c(s_1)}{|c(s_2) - c(s_1)|} & \text{für } 0 < s_2 - s_1 < L, \\ -c'(L) & \text{für } (s_1, s_2) = (0, L). \end{cases}$$

Es gilt $\omega(s, s) = c'(s)$. Definiere $\gamma : [0, L] \to \mathbb{S}^1$ durch Entlanglaufen an den beiden anderen Dreiecksseiten, also

$$\gamma(s) = \begin{cases} \omega(0, 2s) & \text{für } 0 \leq s \leq L/2, \\ \omega(2s - L, L) & \text{für } L/2 \leq s \leq L. \end{cases}$$

Ausführlich bedeutet das

$$\gamma(s) = \begin{cases} c'(0) = e_2 & \text{für } s = 0, \\ \dfrac{c(2s) - c(0)}{|c(2s) - c(0)|} & \text{für } 0 < s < L/2, \\ -c'(0) & \text{für } s = L/2, \\ \dfrac{c(L) - c(2s - L)}{|c(L) - c(2s - L)|} & \text{für } L/2 < s < L, \\ c'(L) = e_2 & \text{für } s = L. \end{cases}$$

Wir zeigen, dass c' in $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ homotop zu γ ist. Wie wir unten sehen werden, lässt sich die Umlaufzahl von γ bestimmen. Zunächst ist ω wohldefiniert, da c einfach geschlossen ist. Längs der Diagonale $\{(s,s) : 0 \leq s \leq L\}$ ist ω stetig, denn für $s_1, s_2 \to s$ mit $s_1 < s_2$ gilt

$$\frac{c(s_2) - c(s_1)}{s_2 - s_1} = \frac{1}{s_2 - s_1} \int_{s_1}^{s_2} c'(t)\, dt \to c'(s),$$

und folglich (beachte $|c'(s)| = 1$)

$$\frac{c(s_2) - c(s_1)}{|c(s_2) - c(s_1)|} = \frac{c(s_2) - c(s_1)}{s_2 - s_1} \frac{s_2 - s_1}{|c(s_2) - c(s_1)|} \to c'(s).$$

Die Stetigkeit in $(0, L)$ ergibt sich analog, wenn wir c periodisch fortsetzen:

$$\frac{c(s_2) - c(s_1)}{s_1 + L - s_2} = -\frac{1}{s_1 + L - s_2} \int_{s_2}^{s_1 + L} c'(t)\, dt \to -c'(L) \quad \text{für } s_1 \searrow 0,\ s_2 \nearrow L.$$

Wir erhalten nun eine Homotopie von c' nach γ durch $h(\lambda, s) = \omega(F(\lambda, s))$, indem wir erst $f : [0,1] \to D$, $f(\lambda) = (1 - \lambda)(L/2, L/2) + \lambda(0, L)$ setzen und dann $F : [0,1] \times [0, L] \to D$ wie folgt definieren (vgl. Bild):

$$F(\lambda, s) = \begin{cases} \frac{2s}{L} f(\lambda) & \text{für } 0 \leq s \leq L/2, \\ (\frac{2s}{L} - 1)\,(L, L) + 2(1 - \frac{s}{L})\, f(\lambda) & \text{für } L/2 \leq s \leq L. \end{cases}$$

Es bleibt, die Umlaufzahl $n(\gamma, 0)$ zu berechnen. Entscheidend ist dass

$$\langle \gamma(s), e_1 \rangle \begin{cases} \leq 0 & \text{für } 0 \leq s \leq L/2, \\ \geq 0 & \text{für } L/2 \leq s \leq L. \end{cases}$$

Sei $\theta : [0, L] \to \mathbb{R}$ der Lift von γ nach Satz 3.1 mit $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$. Mit dem Zwischenwertsatz folgt sukzessive

$$\begin{aligned} \theta(t) &\in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \quad \text{auf } [0, L/2], \\ \theta(t) &\in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right] \quad \text{auf } [L/2, L]. \end{aligned}$$

Wegen $e^{i\theta(L)} = c'(L) = i$ muss $\theta(L) = \frac{5\pi}{2}$ sein, und somit

$$n(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi}(\theta(L) - \theta(0)) = 1.$$

Damit ist der Satz bewiesen. $\square$

Beim Satz von Gauß-Bonnet werden wir einmal das Vorzeichen des Index brauchen. Man hat dort ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ mit glattem, zusammenhängendem Rand und innerer Normale ν. Sei $c : [0, L] \to \partial G$ Parametrisierung nach der Bogenlänge, so dass c', $\nu \circ c$ positiv orientierte Basis ist. Nach Drehung sei wieder $c(0) = (R, 0)$ mit $R = \max_{s \in [0,L]} |c(s)|$. Es folgt dann $\nu(0) = -e_1$ und somit $c'(0) = e_2$. Unser Beweis zeigt also für diese Parametrisierung

$$\mathrm{ind}(c) = +1. \tag{4.6}$$

5 Mehr über ebene Kurven

Für einfach geschlossene, ebene Kurven mit $\varkappa \geq 0$ bezüglich der inneren Normalen können wir nun das Innengebiet genauer charakterisieren, und zwar ist das Innengebiet dann konvex als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. Bekanntlich bedeutet das, mit je zwei Punkten enthält das Gebiet auch die Verbindungsstrecke der Punkte. Wir beginnen mit einer Standardaussage für konvexe Mengen, nämlich der Existenz von Stützhalbebenen.

Lemma 5.1 *Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ abgeschlossen und konvex. Dann gibt es zu jedem $p \in \partial A$ eine affine Halbebene $H = \{q \in \mathbb{R}^2 : \langle q - p, v\rangle \geq 0\}$, so dass $A \subset H$ und $p \in \partial H$.*

Beweis: Zu $q \in \mathbb{R}^2 \backslash A$ gibt es ein $p \in \partial A$ mit $|p - q| = \min_{x \in A} |x - q|$. Für alle $x \in A$ folgt

$$0 \leq \frac{d}{dt}|(1-t)p + tx - q|\big|_{t=0+} = \Big\langle \frac{p-q}{|p-q|}, x - p\Big\rangle.$$

Also gilt $A \subset \{x \in \mathbb{R}^2 : \langle x - p, v\rangle \geq 0\}$ mit $v = \frac{p-q}{|p-q|}$. Sei nun $p \in \partial A$ gegeben. Wähle eine Folge $q_k \in \mathbb{R}^2 \backslash A$ mit $q_k \to p$, und bestimme $p_k \in \partial A$ mit $|p_k - q_k| = \min_{x \in A} |x - q_k|$ wie oben. Dann folgt $|p_k - p| \leq |p_k - q_k| + |q_k - p| \leq 2|q_k - p| \to 0$, und

$$A \subset \{x \in \mathbb{R}^2 : \langle x - p_k, v_k\rangle \geq 0\} \quad \text{ mit } v_k = \frac{p_k - q_k}{|p_k - q_k|}.$$

Nach Wahl einer Teilfolge existiert $v = \lim_{k\to\infty} v_k$, und die Behauptung ist bewiesen mit $A \subset H := \{x \in \mathbb{R}^2 : \langle x - p, v\rangle \geq 0\}$. □

Lemma 5.2 *Sei $c : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ eine einfach C^1-geschlossene, nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit Innengebiet U und innerer Normale ν längs c. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *Das Innengebiet U von c ist konvex.*

(2) *Für alle $s \in [0, L]$ gilt $\mathrm{Bild}(c) \subset \{x \in \mathbb{R}^2 : \langle x - c(s), \nu(s)\rangle \geq 0\} =: H(s)$.*

Beweis: Sei U konvex und $s_0 \in [0, L]$. Da $c(s_0) \in \partial U$, gibt es eine Halbebene $H = \{q \in \mathbb{R}^2 : \langle q - c(s_0), v\rangle \geq 0\}$, so dass $U \subset H$ und $c(s_0) \in \partial H$. Dies folgt leicht aus Lemma 5.1. Wir zeigen $H(s_0) = H$, daraus folgt (2). Betrachte dazu die Funktion $\varphi(s) = \langle c(s) - c(s_0), v\rangle$. In $s = s_0$ hat φ ein Minimum, folglich ist $0 = \varphi'(s_0) = \langle c'(s_0), v\rangle$. Wegen $U \subset H$ muss v die innere Normale $\nu(s_0)$ sein, also gilt $H(s_0) = H$.
Aus (2) folgt sofort $\overline{U} \subset H(s)$ für alle $s \in [0, L]$. Sei umgekehrt $p \in \mathbb{R}^2 \backslash \overline{U}$. Wähle $s_0 \in [0, L]$ mit $|c(s_0) - p| = \min_{s \in [0,L]} |c(s) - p| =: d > 0$. Es folgt $p - c(s_0) \perp c'(s_0)$ beziehungsweise $p = c(s_0) \pm d\,\nu(s_0)$. Die Strecke von $c(s_0)$ nach p enthält keine Punkte der Kurve c. Wegen $p \notin \overline{U}$ liegt die Strecke ganz im Außengebiet von c, deshalb ist $p = c(s_0) - d\nu(s_0)$, das heißt $p \notin H(s_0)$. Somit gilt $\overline{U} = \bigcap_{s \in [0,L]} H(s)$, insbesondere ist $\overline{U}$ und damit $U = \mathrm{int}(\overline{U})$ konvex. □

Satz 5.1 (Charakterisierung konvexer Kurven) *Sei $c : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ eine einfach C^2-geschlossene, nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit Innengebiet U. Dann sind äquivalent:*

(1) *c hat Krümmung $\varkappa \geq 0$ bezüglich der inneren Normalen ν.*

(2) *U ist konvex.*

Beweis: Nach Umparametrisierung können wir annehmen, dass die innere Normale durch $\nu = ic'$ gegeben ist. Ist U konvex, so ist die Funktion $\varphi(s) = \langle c(s) - c(s_0), \nu(s_0)\rangle$ nichtnegativ für alle $s_0 \in [0, L]$ nach Lemma 5.2. Es folgt

$$0 \leq \varphi''(s_0) = \langle c''(s_0), \nu(s_0)\rangle = \varkappa(s_0).$$

Sei umgekehrt $\varkappa \geq 0$. Wir behaupten: ist $c'(s_0) = c'(s_1)$ für $0 \leq s_0 < s_1 < L$, so gilt $c(s_1) - c(s_0) \perp \nu(s_0)$. Sei dazu nach Umparametrisierung $s_0 = 0$. Es gilt

$$n(c'|_{[0,s_1]}, 0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{s_1} \varkappa\, ds \geq 0 \quad \text{und} \quad n(c'|_{[s_1,L]}, 0) = \frac{1}{2\pi}\int_{s_1}^{L} \varkappa\, ds \geq 0.$$

Andererseits liefert der Umlaufsatz von Hopf

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^L \varkappa\, ds = \operatorname{ind}(c) = \pm 1.$$

Also ist $\varkappa(s)$ gleich Null auf $[0, s_1]$ oder auf $[s_1, L]$. Auf diesem Intervall ist dann $c'(s) = c'(s_0)$, also $c(s_1) - c(s_0) \perp \nu(s_0)$ wie behauptet.
Sei nun $s_0 \in [0, L)$ beliebig, und $\varphi(s) = \langle c(s), v\rangle$ mit $v = \nu(s_0)$. Setze $\alpha = \min \varphi$ und $\beta = \max \varphi$, und wähle $s_1, s_2 \in [0, L]$ mit $\varphi(s_1) = \alpha$ und $\varphi(s_2) = \beta$. Es folgt $\varphi'(s_1) = \varphi'(s_2) = 0$, das heißt

$$\langle c'(s_0), v\rangle = \langle c'(s_1), v\rangle = \langle c'(s_2), v\rangle = 0.$$

Mindestens zwei der Vektoren $c'(s_i)$, $i = 0, 1, 2$, sind gleich. Wie gezeigt sind dann auch mindestens zwei der Funktionswerte $\varphi(s_i)$ gleich. Nun ist $v = \nu(s_0)$ innere Normale, also ist $U \cap \{x \in \mathbb{R}^2 : \langle x - c(s_0), v\rangle > 0\}$ nichtleer, und folglich $\varphi(s_2) = \beta > \varphi(s_0)$. Da $\varphi(s_1) = \alpha \leq \varphi(s_0)$, muss $\varphi(s_1) = \varphi(s_0)$ gelten. Das bedeutet aber $\langle c(s) - c(s_0), \nu(s_0)\rangle \geq 0$ für alle $s \in [0, L]$, und nach Lemma 5.2 ist U konvex. □

Satz 5.2 (Vierscheitel-Satz für konvexe Kurven) *Sei $\gamma : I = [0, L] \to \mathbb{R}^2$ eine einfach C^3-geschlossene, nach der Bogenlänge parametrisierte, konvexe Kurve. Dann hat die Funktion $\varkappa'$ mindestens vier verschiedene Nullstellen.*

Beweis: Die Nullstellen von $\varkappa'$ werden auch als Scheitel bezeichnet. Wir können annehmen, dass $\varkappa$ in $s_0 = 0$ sein Minimum annimmt und in $s_1 \in (0, L)$ sein Maximum, dies sind also mal zwei Scheitel. Nach Translation und Drehung liegen $\gamma(0)$ und $\gamma(s_1)$ auf der x-Achse. Angenommen für ein $s \in [0, L]$ ist $\gamma(s)$ auf der x-Achse und $\gamma'(s) = \pm e_1$, das heißt die x-Achse ist Tangente der Kurve. Nach Definition der Konvexität folgt $\gamma(I) \subset H$, wobei H die abgeschlossene obere oder untere Halbebene ist. Ist U das Innengebiet von γ, so folgt weiter

$$\gamma(I) \cap \partial H = \partial U \cap \partial H = \overline{U} \cap \partial H,$$

das heißt $\gamma(I) \cap \partial H$ ist eine Strecke. Damit ist $\gamma([0,s_1]) \subset \partial H$ oder $\gamma([s_1,L]) \subset \partial H$, insbesondere $\varkappa(0) = \varkappa(s_1) = 0$. Aber das heißt $\varkappa \equiv 0$ und γ ist eine Gerade, Widerspruch.

Sei jetzt nach evtl. Spiegelung $\langle \gamma'(0), e_2 \rangle < 0$. Angenommen, $\gamma(s_2)$ liegt auf der x-Achse für ein $s_2 \in (0,s_1)$, Dann haben wir drei Punkte $\gamma(\sigma_\nu)$ auf der x-Achse, nämlich $\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\} = \{0,s_1,s_2\}$, mit $\langle \gamma(\sigma_1), e_1\rangle < \langle \gamma(\sigma_2), e_1\rangle < \langle \gamma(\sigma_3), e_1\rangle$; hier verwenden wir, dass γ einfach ist. Es folgt

$$\begin{aligned} \langle \nu(\sigma_2), \gamma(\sigma_3) - \gamma(\sigma_2)\rangle &= -\underbrace{\langle \gamma'(\sigma_2), e_2\rangle}_{\neq 0} \underbrace{\langle \gamma(\sigma_3) - \gamma(\sigma_2), e_1\rangle}_{>0}, \\ \langle \nu(\sigma_2), \gamma(\sigma_1) - \gamma(\sigma_2)\rangle &= -\underbrace{\langle \gamma'(\sigma_2), e_2\rangle}_{\neq 0} \underbrace{\langle \gamma(\sigma_1) - \gamma(\sigma_2), e_1\rangle}_{<0}, \end{aligned}$$

im Widerspruch zur Konvexität. Wir können also annehmen, dass $\langle \gamma, e_2\rangle < 0$ ist auf $(0,s_1)$, und analog $\langle \gamma, e_2\rangle > 0$ auf (s_1,L). Ist nun $\varkappa$ monoton nichtfallend auf $[0,s_1]$ und monoton nichtwachsend auf $[s_1,L]$, so folgt

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_0^L \varkappa' \langle \gamma(s), e_2\rangle\, ds \\ &= \Big[\varkappa(s)\langle \gamma(s), e_2\rangle\Big]_{s=0}^{s=L} - \int_0^L \varkappa \langle \gamma'(s), e_2\rangle\, ds \\ &= \int_0^L \langle \nu'(s), e_2\rangle\, ds = 0. \end{aligned}$$

Aus der Diskussion des Vorzeichens von $\langle \gamma, e_2\rangle$ ergibt sich $\varkappa' \equiv 0$, das heißt γ ist ein Kreis. Ist aber zum Beispiel $\varkappa$ *nicht* monoton nichtfallend auf $[0,s_1]$, so gibt es $0 \leq s_2 < s_3 \leq s_1$ mit $\varkappa(s_2) > \varkappa(s_3)$, also insbesondere $s_2 > 0$ und $s_3 < s_1$. Aber dann nimmt $\varkappa$ in $[0,s_3]$ ein (lokales) Maximum und in $[s_2,s_1]$ ein (lokales) Minimum an. Wir haben also sogar bewiesen, dass $\varkappa$ mindestens zwei lokale Maxima und zwei lokale Minima hat. □

Der Vierscheitel-Satz gilt auch für nichtkonvexe Kurven. Eine Standardreferenz ist R. Osserman, The four-or-more vertex theorem, *American Mathematical Monthly* **92** (1985), 332–337.

Zuletzt kommen wir zur isoperimetrischen Ungleichung, die in der Geometrie und Analysis fundamentale Bedeutung hat. Unser Beweis folgt einer Arbeit von F. Hélein, siehe *Annales de l'Institut Fourier* **44** (1994), 1211-1218. Statt von einer gegebenen Kurve wollen wir hier mit einem gegebenen Gebiet $U \subset \mathbb{R}^2$ starten, das passt besser zum Problem.

Definition 5.1 (Gebiet mit C^1-Rand) *$U \subset \mathbb{R}^2$ offen hat C^1-Rand, wenn es zu jedem $p \in \partial U$ offene Intervalle I, J gibt sowie eine Funktion $u \in C^1(I,J)$ mit*

$$U \cap (I \times J) = \{(x,y) \in I \times J : y < u(x)\},$$

nach evtl. Vertauschung und Spiegelung der Koordinaten.

Es ist nicht allzu schwer zu sehen, dass ∂U dann aus endlich vielen, einfach geschlossenen C^1-Kurven $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$ besteht. Ist $\gamma_i : [0, L_i] \to \Gamma_i$ jeweils eine Parametrisierung nach der Bogenlänge, so gilt

$$\int_{\partial U} f(x)\, ds(x) = \sum_{i=1}^{r} \int_0^{L_i} f(\gamma_i(s))\, ds.$$

Für den Beweis der isoperimetrischen Ungleichung brauchen wir als Hilfsmittel den Integralsatz von Gauß. Hier tritt der Begriff der äußeren Normale ν auf; ist U lokal als Subgraph $\{y < u(x)\}$ gegeben, so ist

$$\nu(x,y) = \frac{(-u'(x), 1)}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} \quad \text{für } (x,y) = (x, u(x)) \in \partial U.$$

Satz 5.3 (Integralsatz von Gauß) *Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit C^1-Rand. Dann gilt für ein Vektorfeld $X \in C^1(\overline{U}, \mathbb{R}^2)$*

$$\int_U \operatorname{div} X\, dx = \int_{\partial U} \langle X, \nu \rangle\, ds.$$

Dabei ist $\nu : \partial U \to \mathbb{S}^1$ die äußere Normale.

Nach diesen Grundlagen kommen wir nun zur isoperimetrischen Ungleichung. Wir betrachten die Familie aller Kreise, die durch den Nullpunkt gehen und dort tangential zur x-Achse sind. Die Gleichung dieser Kreise ist

$$0 = |x - te_2|^2 - t^2 = |x|^2 - 2t\langle x, e_2 \rangle \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}.$$

Jedes $x \in \mathbb{R}^2$ mit $\langle x, e_2 \rangle \neq 0$ liegt auf genau einem solchen Kreis. Im Punkt x hat dieser die (nicht normierte) äußere Normale

$$x - te_2 = x - \frac{|x|^2}{2\langle x, e_2 \rangle} e_2 = \frac{|x|^2}{2\langle x, e_2 \rangle}\Big(2\Big\langle \frac{x}{|x|}, e_2 \Big\rangle \frac{x}{|x|} - e_2\Big) =: -\frac{|x|^2}{2\langle x, e_2 \rangle} R(x) e_2.$$

Dabei ist $R(x)$ die Spiegelung an der Geraden $\{x\}^\perp$. Die Formel ist auch anschaulich klar, weil die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{0x}$ eine Symmetrielinie ist. Die Idee des Beweises ist, das gegebene Gebiet mit den Kreisen der Familie zu vergleichen.

Satz 5.4 (Isoperimetrische Ungleichung) *Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ beschränktes Gebiet mit C^1-Rand. Ist A der Flächeninhalt von U und L die Länge von ∂U, so gilt*

$$A \leq \frac{1}{4\pi} L^2,$$

mit Gleichheit genau wenn U eine Kreisscheibe ist.

Beweis: Für jedes $x \in U$ berechnen wir

$$\operatorname{div}_y \frac{x - y}{|x - y|^2} = 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^2 \backslash \{x\}.$$

Sei $\nu(y)$ die äußere Einheitsnormale von $U\backslash B_\varepsilon(x)$, also $\nu(y) = \frac{x-y}{|x-y|}$ auf $\partial B_\varepsilon(x)$. Mit dem Satz von Gauß folgt für $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(x, \partial U)$

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{\langle x-y, \nu(y)\rangle}{|x-y|^2}\, ds(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial U} \frac{\langle x-y, \nu(y)\rangle}{|x-y|^2}\, ds(y),$$

Vergleiche die Formel für die Umlaufzahl aus Definition 3.3. Nun berechne, für feste $y, v \in \mathbb{R}^2$ und alle $x \neq y$,

$$\operatorname{div}_x R(x-y)v = -2\operatorname{div}_x\Big(\langle x-y, v\rangle \frac{x-y}{|x-y|^2}\Big) = -2\Big\langle \frac{x-y}{|x-y|^2}, v\Big\rangle.$$

Mit Fubini, dem Satz von Gauß und Cauchy-Schwarz folgt

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2\pi} \int_U \int_{\partial U} \frac{\langle x-y, \nu(y)\rangle}{|x-y|^2}\, ds(y)\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial U} \int_U \frac{\langle x-y, \nu(y)\rangle}{|x-y|^2}\, dx\, ds(y) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial U} \int_U \operatorname{div}_x R(x-y)\nu(y)\, dx\, ds(y) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial U} \int_{\partial U} \langle R(x-y)\nu(y), \nu(x)\rangle\, ds(x)\, ds(y) \\ &\leq \frac{1}{4\pi} \int_{\partial U} \int_{\partial U} ds(x)\, ds(y) = \frac{1}{4\pi} L^2. \end{aligned}$$

Bei Gleichheit ist $\nu(x) = R(x-y)\nu(y)$ für alle $x, y \in \partial U$ mit $x \neq y$. Sei etwa $y = 0$ und $\nu(0) = -e_2$ nach Drehung. Wie eingangs überlegt, ist $\nu(x) = -R(x)e_2$ genau die äußere Einheitsnormale des Kreises unserer Familie, auf dem x liegt. Ist $c : [0, L_i] \to \Gamma_i$ die Parametrisierung nach der Bogenlänge einer Komponente von ∂U, so folgt für $\langle c(s), e_2\rangle \neq 0$

$$\frac{d}{ds}(|c(s)|^2 - 2t\langle c(s), e_2\rangle) = \langle c'(s), c(s) - 2te_2\rangle = -\frac{|c(s)|^2}{2\langle c(s), e_2\rangle}\langle c'(s), \nu(c(s))\rangle = 0.$$

Damit verläuft $c(s)$ in einem Kreis C_t der Familie. Das Bild von c ist offen und abgeschlossen in C_t und damit gleich C_t. Da U im Nullpunkt lokaler Graph ist, ist U tatsächlich eine Kreisscheibe. Hier könnte alternativ mit der Optimalität argumentiert werden. $\square$

Ein technischer Punkt bleibt noch nachzutragen: bei der Anwendung des Satzes von Gauß hat das Vektorfeld $X(x)$ am Punkt $x = y \in \partial U$ eine Singularität, denn es gilt

$$X(x) = R(x-y)\nu(y) = \nu(y) - 2\Big\langle \frac{x-y}{|x-y|}, \nu(y)\Big\rangle \frac{x-y}{|x-y|}.$$

Um den Schritt zu rechtfertigen, wählen wir eine Abschneidefunktion $\eta_\varrho \in C^\infty(B_\varrho(y))$ mit $0 \leq \eta_\varrho \leq 1$ und $|D\eta_\varrho| \leq C/\varrho$. Es gilt

$$\operatorname{div}(\eta_\varrho X) = \eta_\varrho \operatorname{div} X + \langle D\eta_\varrho, X\rangle.$$

Jetzt wenden wir den Satz von Gauß an und lassen $\varrho \searrow 0$ gehen.

Die isoperimetrische Ungleichung gilt auch unter schwächeren Voraussetzungen an die Regularität des Gebiets U, siehe Satz 3.2.43 und 3.2.44 in H. Federer: Geometric Measure Theory, Springer Grundlehren Band 153, 1969.

6 Die erste Fundamentalform einer Fläche

Unsere Darstellung der Flächentheorie geht von Flächen aus, die durch eine Parameterdarstellung auf einem zweidimensionalen Gebiet gegeben sind. Lokal ist das natürlich für jede Fläche der Fall. Gegenüber der Auffassung von Flächen als Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ hat der parametrische Zugang den Vorteil, dass die zentralen Größen wie die erste und zweite Fundamentalform auf dem Parametergebiet definiert sind; dies bereitet den Umgang mit Riemannschen Metriken und allgemeiner Tensoren bei abstrakten Mannigfaltigkeiten vor. Auf der anderen Seite knüpft die Sichtweise direkt an die Kurventheorie an.

Definition 6.1 *Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $k \in \mathbb{N} \cap \{\infty\}$. Eine Abbildung $F \in C^k(U,\mathbb{R}^3)$ heißt (regulär parametrisierte) Fläche oder zweidimensionale Immersion der Klasse C^k, falls gilt:*

$$\operatorname{rang} DF(x) = 2 \quad \textit{für alle } x = (x^1, x^2) \in U.$$

Mit anderen Worten, die Vektoren $\partial_1 F(x)$ und $\partial_2 F(x)$ sind linear unabhängig für alle $x \in U$. Der zweidimensionale Unterraum

$$\text{(6.1)} \qquad \operatorname{Bild} DF(x) = \operatorname{Span}\{\partial_1 F(x), \partial_2 F(x)\}$$

heißt Tangentialraum von F im Punkt x. Der *affine* Tangentialraum ist $F(x) + \operatorname{Bild} DF(x)$. Die Abbildung F wird nicht als injektiv vorausgesetzt, das heißt die Fläche darf sich selbst durchdringen. Es macht dann keinen Sinn, vom Tangentialraum im Punkt $p \in \operatorname{Bild} F$ zu reden. Eine stetige Abbildung $N : U \to \mathbb{R}^3$ heißt Einheitsnormale längs F, falls

$$\text{(6.2)} \qquad |N(x)| = 1 \quad \text{und} \quad N(x) \perp \operatorname{Bild} DF(x) \quad \text{für alle } x \in U.$$

Für Einheitsnormalen $N_{1,2}$ längs F ist $\langle N_1, N_2\rangle \in \{\pm 1\}$. Ist U zusammenhängend, so gibt daher genau zwei Einheitsnormalen längs F, nämlich

$$N^\pm : U \to \mathbb{S}^2,\ N^\pm(x) = \pm \frac{\partial_1 F(x) \times \partial_2 F(x)}{|\partial_1 F(x) \times \partial_2 F(x)|}.$$

Insbesondere ist für $F \in C^k$ jede Einheitsnormale von der Klasse C^{k-1}.

Beispiel 6.1 (Graphen) Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen. Der Graph einer reellwertigen Funktion $f \in C^k(U)$, $f = f(x,y)$, ist die parametrisierte Fläche $F : U \to \mathbb{R}^3$, $F(x,y) = (x, y, f(x,y))$. Es folgt, wenn wir die partiellen Anleitungen mit f_x und f_y bezeichnen,

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_x(x,y) & f_y(x,y) \end{pmatrix}.$$

Offenbar ist $\operatorname{rang} DF(x,y) = 2$. Wir berechnen

$$F_x \times F_y = (1, 0, f_x) \times (0, 1, f_y) = (-f_x, -f_y, 1) = (-Df, 1),$$

also erhalten wir die Einheistnormale

$$\text{(6.3)} \qquad N = \frac{(-Df, 1)}{\sqrt{1 + |Df|^2}} : U \to \mathbb{S}^2.$$

Definition 6.2 (erste Fundamentalform) *Sei $F \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche. Dann heißt die von $x \in U$ abhängige Bilinearform*

$$g(x)(v,w) = \langle DF(x)v, DF(x)w \rangle \quad (v,w \in \mathbb{R}^2)$$

erste Fundamentalform von F. Bezüglich der Standardbasis $\{e_1, e_2\}$ hat g die Koeffizienten

$$g_{ij} : U \to \mathbb{R},\ g_{ij}(x) = \langle \partial_i F(x), \partial_j F(x) \rangle \quad (1 \leq i,j \leq 2).$$

Die zugehörige Matrix bezeichnen wir mit

$$G : U \to \mathbb{R}^{2\times 2},\ G(x) = DF(x)^{\mathrm{T}} DF(x) = \big(g_{ij}(x)\big)_{1 \leq i,j \leq 2}.$$

Für jedes $x \in U$ ist $g(x)$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$, denn es gilt:

- $g(x)$ ist symmetrisch:

  $$g(x)(v,w) = \langle DF(x)v, DF(x)w \rangle = \langle DF(x)w, DF(x)v \rangle = g(x)(w,v).$$

  Äquivalent dazu ist die Symmetrie der Matrix G, also $g_{ij} = g_{ji}$.

- $g(x)$ ist bilinear:

  $$\begin{aligned} g(x)(\alpha v_1 + \beta v_2, w) &= \langle DF(x)(\alpha v_1 + \beta v_2), DF(x)w \rangle \\ &= \alpha \langle DF(x)v_1, DF(x)w \rangle + \beta \langle DF(x)v_2, DF(x)w \rangle \\ &= \alpha\, g(x)(v_1, w) + \beta\, g(x)(v_2, w). \end{aligned}$$

  Die Linearität in der zweiten Komponente folgt wegen der Symmetrie.

- $g(x)$ ist positiv definit:

  $$g(x)(v,v) = \langle DF(x)v, DF(x)v \rangle = |DF(x)v|^2 \geq 0.$$

  Bei Gleichheit folgt $DF(x)v = 0$ und hieraus $v = 0$, denn für $DF(x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gilt nach Voraussetzung $\dim\ker DF(x) = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \operatorname{Bild} DF(x) = 0$.

Die Abbildung $DF(x) : \big(\mathbb{R}^2, g(x)\big) \to (\operatorname{Bild} DF(x), \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^3})$ ist eine Isometrie zwischen (zweidimensionalen) Euklidischen Vektorräumen, denn es gilt nach Definition

$$|DF(x)v| = \sqrt{g(x)(v,v)} = \|v\|_{g(x)}. \tag{6.4}$$

Ein Skalarprodukt, das von $x \in U$ abhängt, nennt man Riemannsche Metrik auf U; dabei wird die Abhängigkeit von $x \in U$ in der Notation oft ignoriert, das heißt man schreibt oft $g(v,v)$ für die Funktion $x \mapsto g(x)(v,v)$.

Lemma 6.1 (Bogenlänge auf Flächen) *Sei $F \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche. Dann gilt für jede Kurve $\gamma \in C^1(I, U)$*

$$L(F \circ \gamma) = \int_I \sqrt{g(\gamma(t))(\gamma'(t), \gamma'(t))}\, dt = \int_I \|\gamma'(t)\|_{g(\gamma(t))}\, dt.$$

BEWEIS: Aus (6.4) folgt

$$L(F\circ\gamma) = \int_I |(F\circ\gamma)'(t)|\,dt = \int_I |DF(\gamma(t))\gamma'(t)|\,dt = \int_I \sqrt{g(\gamma(t))(\gamma'(t),\gamma'(t))}\,dt.$$

$\square$

Beispiel 6.2 (Erste Fundamentalform von Graphen) Für eine als Graph gegebene Fläche $F : U \to \mathbb{R}^3$, $F(x,y) = (x,y,f(x,y))$ folgt für die erste Fundamentalform

$$G = \begin{pmatrix} 1+f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1+f_y^2 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 6.3 (Rotationsflächen) Sei $c : (a,b) \to \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$, $c(t) = (r(t),h(t))$ eine reguläre Kurve. Durch Rotation um die z-Achse erhalten wir die Fläche

$$F : (a,b)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ F(t,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r(t) \\ 0 \\ h(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t)\cos\varphi \\ r(t)\sin\varphi \\ h(t) \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen

$$DF(t,\varphi) = \begin{pmatrix} r'(t)\cos\varphi & -r(t)\sin\varphi \\ r'(t)\sin\varphi & r(t)\cos\varphi \\ h'(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Für die erste Fundamentalform folgt

$$G(t,\varphi) = \begin{pmatrix} r'(t)^2 + h'(t)^2 & 0 \\ 0 & r(t)^2 \end{pmatrix}.$$

Da $r(t) > 0$ und $c'(t) \neq 0$ nach Voraussetzung, gilt

$$\det G(t,\varphi) = r(t)^2\big(r'(t)^2 + h'(t)^2\big) > 0.$$

Also ist $\operatorname{rang} DF(t,\varphi)^{\mathrm{T}} DF(t,\varphi) = 2$, und F ist eine Immersion.

Lemma 6.2 (Winkel zwischen Tangentialvektoren) *Sei $F \in C^1(U,\mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche und $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$. Der Winkel zwischen den Vektoren $DF(x)v_1$ und $DF(x)v_2$ ist*

$$\sphericalangle(DF(x)v_1, DF(x)v_2) = \arccos\frac{g(x)(v_1,v_2)}{\|v_1\|_{g(x)}\,\|v_2\|_{g(x)}} =: \angle_{g(x)}(v_1,v_2).$$

BEWEIS: Wir berechnen mit (6.4)

$$\angle\big(DF(x)v_1, DF(x)v_2\big) = \arccos\frac{\langle DF(x)v_1, DF(x)v_2\rangle}{|DF(x)v_1|\,|DF(x)v_2|} = \arccos\frac{g(x)(v_1,v_2)}{\|v_1\|_{g(x)}\|v_2\|_{g(x)}}.$$

$\square$

Als nächstes wollen wir den Flächeninhalt einer Immersion definieren. Zur Motivation betrachten wir für Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ den Flächeninhalt $A(v_1, v_2)$ des von ihnen aufgespannten Parallelogramms. Wir behaupten

$$A(v_1, v_2) = \sqrt{|v_1|^2 |v_2|^2 - \langle v_1, v_2 \rangle^2}.$$

Wähle dazu $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^3$ orthonormal mit $v_1 = \alpha e_1$ und $v_2 = \beta e_1 + \gamma e_2$, und berechne mittels Scherung

$$A(v_1, v_2) = A(\alpha e_1, \beta e_1 + \gamma e_2) = A(\alpha e_1, \gamma e_2) = |\alpha\gamma| = \sqrt{|v_1|^2 |v_2|^2 - \langle v_1, v_2 \rangle^2}.$$

Ist nun $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine Immersion, so folgt

$$A(\partial_1 F, \partial_2 F) = \sqrt{|\partial_1 F|^2 |\partial_2 F|^2 - \langle \partial_1 F, \partial_2 F \rangle} = \sqrt{\det G}.$$

Es sollte daher gelten

$$dA = A(F_x, F_y)\, dxdy = \sqrt{\det G}\, dxdy.$$

Definition 6.3 *Der Flächeninhalt einer Immersion $F : U \to \mathbb{R}^3$ ist*

$$A(F) = \int_U \sqrt{\det G} =: A_g(U),$$

wobei $G : U \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Matrix der ersten Fundamentalform von F ist.

Beispiel 6.4 Für einen Graphen $F : U \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y) = (x, y, f(x, y))$ erhalten wir

$$A(F) = \int_U \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \int_U \sqrt{1 + |Df|^2}.$$

Beispiel 6.5 Für den Flächeninhalt einer Rotationsfläche

$$F : (a, b) \times (\varphi_1, \varphi_2) \to \mathbb{R}^3,\ F(t, \varphi) = (r(t)\cos\varphi, r(t)\sin\varphi, h(t))$$

ergibt sich die Guldinsche Formel

$$A(F) = (\varphi_2 - \varphi_1) \int_a^b r\sqrt{(r')^2 + (h')^2}.$$

Wir kommen nun, analog zu unserer Diskussion bei Kurven, zu Umparametrisierungen.

Definition 6.4 *Seien $F : U \to \mathbb{R}^3$, $\tilde{F} : V \to \mathbb{R}^3$ Flächen der Klasse C^1. Dann heißt $\tilde{F}$ Umparametrisierung von F, falls es einen C^1-Diffeomorphismus $\phi : V \to U$ gibt mit*

$$\tilde{F} = F \circ \phi.$$

Auf der Menge aller parametrisierten C^1-Flächen ist die Relation

$$F \sim \tilde{F} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{F} \text{ ist Umparametrisierung von } F$$

eine Äquivalenzrelation. Der Diffeomorphismus ϕ ist nicht eindeutig bestimmt, zum Beispiel gilt für eine Rotationsfläche trivialerweise $F = F \circ \mathrm{id}$, aber natürlich auch $F = F \circ \tau_k$ für $\tau_k(t, \varphi) = (t, \varphi + 2k\pi)$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Satz 6.1 (Transformationsverhalten von g) *Sei $F \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche.*

(1) *Ist $\tilde{F} \in C^1(V, \mathbb{R}^3)$ eine Umparametrisierung von F, also $\tilde{F} = F \circ \phi$ mit einem C^1-Diffeomorphismus $\phi : V \to U$, so gilt für die zugehörigen ersten Fundamentalformen $\tilde{g}(v, w) = g \circ \phi(D\phi \cdot v, D\phi \cdot w)$ bzw. äquivalent*

$$\tilde{G} = D\phi^{\mathrm{T}} \, (G \circ \phi) \, D\phi \qquad \textit{oder} \qquad \tilde{g}_{ij} = \sum_{k,l=1}^{2} g_{kl} \circ \phi \, \partial_i \phi^k \partial_j \phi^l.$$

(2) *Ist $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Euklidische Bewegung und $\tilde{F} = B \circ F$, so folgt $\tilde{g} = g$.*

Beweis: In der Situation von (1) berechnen wir

$$\begin{aligned} \tilde{g}(v, w) &= \langle D(F \circ \phi) \cdot v, D(F \circ \phi) \cdot w \rangle \\ &= \langle (DF) \circ \phi \, D\phi \cdot v, (DF) \circ \phi \, D\phi \cdot w \rangle \\ &= g \circ \phi(D\phi \cdot v, D\phi \cdot w). \end{aligned}$$

Weiter folgt

$$\tilde{g}_{ij} = \tilde{g}(e_i, e_j) = (g \circ \phi)(\partial_i \phi, \partial_j \phi) = \sum_{k,l=1}^{2} (g_{kl} \circ \phi) \partial_i \phi^k \partial_j \phi^l.$$

Die Formel für die Matrix ergibt sich alternativ wie folgt:

$$\begin{aligned} \tilde{G} &= D(F \circ \phi)^{\mathrm{T}} D(F \circ \phi) \\ &= \big((DF) \circ \phi \, D\phi\big)^{\mathrm{T}} (DF) \circ \phi \, D\phi \\ &= D\phi^{\mathrm{T}} \, \big(DF^{\mathrm{T}} DF\big) \circ \phi \, D\phi \\ &= D\phi^{\mathrm{T}} \, (G \circ \phi) \, D\phi. \end{aligned}$$

Für Behauptung (2) beachten wir $B(y) = Sy + a$ mit $S \in \mathbb{O}(3)$ und $a \in \mathbb{R}^3$, siehe Satz 0.1, also $DB(y) = S$ für alle $y \in \mathbb{R}^3$ und

$$\tilde{g}(x)(v, w) = \langle D(B \circ F)(x)v, D(B \circ F)(x)w \rangle = \langle S \, DF(x)v, S \, DF(x)w \rangle = g(x)(v, w).$$

□

Wir wollen überprüfen, ob die definierten Begriffe Bogenlänge, Winkel und Flächeninhalt unabhängig von der Wahl der Parametrisierung sind. Interessanterweise können wir diese Invarianz allein aus der Transformationsformel für die erste Fundamentalform herleiten, ohne auf die Fläche F direkt Bezug zu nehmen.

Folgerung 6.1 *Sei $F \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche und $\tilde{F} = F \circ \phi$ eine Umparametrisierung mit einem Diffeomorphismus $\phi \in C^1(V, U)$. Sind g bzw. $\tilde{g}$ die zugehörigen ersten Fundamentalformen, so gelten folgende Aussagen:*

(1) $L_g(\phi \circ \gamma) = L_{\tilde{g}}(\gamma)$ *für $\gamma : I \to V$,*

(2) $\angle_{g(\phi(x))}(D\phi(x)v, D\phi(x)w) = \angle_{\tilde{g}(x)}(v, w)$ *für $x \in V$ und $v, w \in \mathbb{R}^2$,*

(3) $A_g(\phi(E)) = A_{\tilde{g}}(E)$ *für $E \subset V$.*

Beweis: Nach Satz 6.1 gilt $g(\phi(x))(D\phi(x)v, D\phi(x)w) = \tilde{g}(v,w)$, also

$$\|D\phi(x)v\|_{g(\phi(x))} = \|v\|_{\tilde{g}(x)} \quad \text{und} \quad \angle_{g(\phi(x))}(D\phi(x)v, D\phi(x)w) = \angle_{\tilde{g}(x)}(v,w).$$

Mit $(\phi \circ \gamma)'(t) = D\phi(\gamma(t))\gamma'(t)$ folgt weiter

$$L_g(\phi \circ \gamma) = \int_I \|D\phi(\gamma(t))\gamma'(t)\|_{g(\phi(\gamma(t)))}\,dt = \int_I \|\gamma'(t)\|_{\tilde{g}(\gamma(t))}\,dt = L_{\tilde{g}}(\gamma).$$

Schließlich liefert der Transformationssatz und Satz 6.1

$$\begin{aligned} A_g(\phi(E)) &= \int_{\phi(E)} \sqrt{\det G} \\ &= \int_E \sqrt{\det G} \circ \phi |\det D\phi| \\ &= \int_E \sqrt{\det\left(D\phi^{\mathrm{T}}(G \circ \phi) D\phi\right)} \\ &= A_{\tilde{g}}(E). \end{aligned}$$

□

Ein zentrales Hilfsmittel der Kurventheorie war die Umparametrisierung nach der Bogenlänge. Es stellt sich die Frage, ob es für Flächen $F \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ ebenfalls besonders günstige und natürliche Parametrisierungen gibt. Folgende drei Möglichkeiten werden durch unsere bisherige Diskussion nahegelegt:

(1) F heißt längentreu parametrisiert, falls $L(F \circ \gamma) = L_{\mathbb{R}^2}(\gamma)$ für alle Kurven $\gamma : I \to U$.

(2) F heißt flächentreu parametrisiert, falls $A(F|_V) = A_{\mathbb{R}^2}(V)$ für alle Mengen $V \subset U$.

(3) F heißt winkeltreu (oder konform) parametrisiert, falls $\angle(DF \cdot v, DF \cdot w) = \angle_{\mathbb{R}^2}(v,w)$ für alle $x \in U$ und alle $v, w \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$.

Diese drei Eigenschaften lassen sich in Bedingungen für die erste Fundamentalform g übersetzen, und zwar wie folgt:

Lemma 6.3 *Für eine regulär parametrisierte Fläche $F \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ mit erster Fundamentalform $G = (g_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2}$ gelten folgende Aussagen:*

(1) *F ist längentreu* $\Leftrightarrow$ $G = (\delta_{ij})$,

(2) *F ist flächentreu* $\Leftrightarrow$ $\det G = 1$,

(3) *F ist winkeltreu* $\Leftrightarrow$ $G = \lambda^2(\delta_{ij})$ *für eine Funktion* $\lambda : U \to \mathbb{R}^+$.

Insbesondere: längentreu $\Leftrightarrow$ flächentreu und winkeltreu.

Beweis: Nach Lemma 6.1 ist $L(F \circ \gamma) = L_g(\gamma)$, also folgt aus $g_{ij} = \delta_{ij}$ direkt die Längentreue von F. Umgekehrt betrachten wir für beliebige $x_0 \in U$, $v \in \mathbb{R}^2$ die Kurve $\gamma(t) = x_0 + tv$ und folgern aus der Längentreue

$$\sqrt{g(x_0)(v,v)} = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \sqrt{g(x_0 + tv)(v,v)}\,dt = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\varepsilon} L_g(\gamma|_{[0,\varepsilon]}) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\varepsilon} L_{\mathbb{R}^2}(\gamma|_{[0,\varepsilon]}) = |v|,$$

also durch Polarisation $g_{ij} = \delta_{ij}$. Damit ist (1) gezeigt. Aus $\det G = 1$ folgt die Flächentreue direkt nach Definition 6.3. Ist umgekehrt F flächentreu, so gilt für beliebiges $x_0 \in U$ mit $D_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| < \varepsilon\}$

$$\sqrt{\det G(x_0)} = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \int_{D_\varepsilon(x_0)} \sqrt{\det G} = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\pi\varepsilon^2} A(F|_{D_\varepsilon(x_0)}) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\pi\varepsilon^2} A_{\mathbb{R}^2}(D_\varepsilon(x_0)) = 1.$$

Ist schließlich F winkeltreu und $e_{1,2}$ die Standardbasis, so folgt mit Lemma 6.2

$$g_{12} = \|e_1\|_g \, \|e_2\|_g \, \cos \sphericalangle(DF \cdot e_1, DF \cdot e_2) = \|e_1\|_g \, \|e_2\|_g \, \cos \angle_{\mathbb{R}^2}(e_1, e_2) = 0,$$

$$g_{11} - g_{22} = g(e_1 + e_2, e_1 - e_2) = \|e_1 + e_2\|_g \, \|e_1 - e_2\|_g \, \cos \angle_{\mathbb{R}^2}(e_1 + e_2, e_1 - e_2) = 0.$$

Die Darstellung in (3) gilt also mit $\lambda = \sqrt{(g_{11} + g_{22})/2} > 0$. Die umgekehrte Implikation in (3) folgt direkt aus Lemma 6.2. □

Um eine längentreue bzw. flächentreue bzw. winkeltreue Umparametrisierung einer gegebenen Fläche $F \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ herzustellen, ist nach Satz 6.1 ein Diffeomorphismus $\phi : V \to U$ zu bestimmen , der folgende Gleichungen löst:

$$\begin{aligned} \tilde{G} = D\phi^{\mathrm{T}}\,(G \circ \phi)\, D\phi &= \mathrm{E}_2 && \text{für} \quad \tilde{F} = F \circ \phi \text{ längentreu,} \\ \det \tilde{G} = (\det G) \circ \phi\, (\det D\phi)^2 &= 1 && \text{für} \quad \tilde{F} = F \circ \phi \text{ flächentreu,} \\ \tilde{G} = D\phi^{\mathrm{T}}\,(G \circ \phi)\, D\phi &\in \mathbb{R}^+ \mathrm{E}_2 && \text{für} \quad \tilde{F} = F \circ \phi \text{ winkeltreu.} \end{aligned}$$

Die Längentreue führt auf drei Bedingungen für die beiden gesuchten Funktionen ϕ^1 und ϕ^2. Es könnte der Verdacht aufkommen, dass das Problem überbestimmt ist, also nicht immer lösbar. Dieser Zweifel ist in der Tat berechtigt, und zwar hat Gauß eine Krümmungsgröße gefunden, die im Fall der Existenz einer längentreuen Parametrisierung gleich Null sein muss. Diesen Satz, den Gauß als *Theorema egregium* bezeichnet hat, werden wir in Folgerung 9.2 beweisen.
Die Bedeutung der winkeltreuen (oder konformen) Parametrisierung liegt im Bezug zur komplexen Analysis. Sei $F : U \to V$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus zwischen den offenen Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^2$, also insbesondere $\det DF > 0$. Nach Lemma 6.3(3) ist F genau dann winkeltreu bezüglich des Standardskalarprodukts, wenn $DF^{\mathrm{T}} DF = \lambda^2 \mathrm{E}_2$ für eine Funktion $\lambda > 0$, das heißt $\frac{1}{\lambda} DF$ ist orthogonal. Schreiben wir $F = (u, v) = u + iv$, so bedeutet das

$$DF(z) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^+ \mathbb{SO}(2) \quad \text{bzw. äquivalent} \quad u_x = v_y \text{ und } u_y = -v_x.$$

Die orientierungserhaltenden, winkeltreuen Diffeomorphismen sind also genau die holomorphen Diffeomorphismen. Hat man nun zwei winkeltreue Parameterdarstellungen einer Fläche, und ist der Parameterwechsel orientierungserhaltend, so ist der Parameterwechsel holomorph. Dies ist der Anfangspunkt der Theorie der Riemannschen Flächen, also der eindimensionalen komplexen Mannigfaltigkeiten.

Satz 6.2 (Existenz konformer Parameter) *Sei $F \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche. Dann gibt es zu $w_0 \in U$ eine Umgebung $\tilde{U}$ und einen Diffeomorphismus $\phi \in C^\infty(V, \tilde{U})$, so dass $F \circ \phi : V \to \mathbb{R}^3$ winkeltreu (konform) parametrisiert ist.*

Der Beweis dieses Satzes erfordert die lokale Lösung einer elliptischen partiellen Differentialgleichung und kann an dieser Stelle nicht geführt werden. Der erste Beweis stammt von Gauß*. Er setzte voraus, dass die Koordinatenfunktionen $F^i = F^i(x, y)$ der gegeben Fläche reell-analytisch sind, das heißt sie sind lokal als Potenzreihen in den Variablen x und y darstellbar, und erhält dann die Lösung ebenfalls als lokal konvergente Potenzreihe. Der erste Beweis für glatte Flächen stammt von L. Lichtenstein (1911).

Wir wollen schließlich kurz auf die flächentreuen Parametrisierungen eingehen. Der lokale Existenzbeweis kann auf die Lösung eines Anfangswertproblems für gewöhnliche Differentialgleichungen reduziert werden.

Satz 6.3 (Existenz flächentreuer Parameter) *Sei $F \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche und $w_0 \in U$. Dann gibt es eine Umgebung $\tilde{U}$ von w_0 und einen Diffeomorphismus $\phi : V \to \tilde{U}$, so dass $F \circ \phi : V \to \mathbb{R}^3$ flächentreu parametrisiert ist.*

Beweis: Wir können $w_0 = 0$ annehmen, und machen für ϕ den Ansatz

$$\phi(x, y) = (x, \varphi(x, y)) \text{ mit } \varphi(0, 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad D\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varphi_x & \varphi_y \end{pmatrix}.$$

Wie nach Lemma 6.2 gezeigt, ist $F \circ \phi$ genau dann flächentreu, wenn $\det(G \circ \phi)\,(\det D\phi)^2 = 1$. Der Satz ist also bewiesen, wenn φ glatte Lösung des folgenden Anfangswertproblems ist:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\det G(x, \varphi(x, y))}} \quad \text{und} \quad \varphi(x, 0) = 0.$$

Nach Picard-Lindelöf besitzt dieses Problem für $|x|, |y| < \delta$ eine eindeutige Lösung, die glatt von x und y abhängt.† □

*C. F. Gauß: Allgemeine Auflösung der Aufgabe, die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, daß die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird. Preisschrift für die Kopenhagener Akademie der Wissenschaften, 1825

†vgl. J. Dieudonné: Foundations of modern analysis, Academic Press, New York and London 1969, §X,7

7 Die zweite Fundamentalform einer Fläche

Wir kommen jetzt zur Definition der Krümmung einer Fläche. Da eine Fläche in verschiedenen Richtungen unterschiedlich gekrümmt sein kann, erwarten wir nicht, die Krümmung nur durch eine Funktion zu erfassen. Stattdessen lassen wir uns von der Idee leiten, dass die Krümmung die Normalkomponente der zweiten Ableitungen sein sollte, vgl. die entsprechende Definition 3.2 für Kurven.

Definition 7.1 (zweite Fundamentalform) *Sei $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche mit Einheitsnormale $N : U \to \mathbb{S}^2$ längs F. Die von $x \in U$ abhängige symmetrische Bilinearform*

$$h(x)(v, w) = \langle D^2F(x)(v, w), N(x)\rangle \quad (v, w \in \mathbb{R}^2)$$

heißt zweite Fundamentalform von F. Bezüglich der Standardbasis hat h die Koeffizienten

$$h_{ij} : U \to \mathbb{R},\ h_{ij}(x) = \langle \partial^2_{ij} F(x), N(x)\rangle \quad (1 \leq i, j \leq 2).$$

In einem Skalarproduktraum kann man jeder Bilinearform kanonisch eine lineare Abbildung zuordnen. Dies ist zum Beispiel deshalb wichtig, weil man dann von den Eigenwerten der Bilinearform reden kann, und zwar meint man die Eigenwerte der zugeordneten Abbildung. Wir wollen diese Tatsache aus der linearen Algebra kurz wiederholen.

Lemma 7.1 *Sei $g(\cdot, \cdot)$ ein Skalarprodukt und $h(\cdot, \cdot)$ eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit*

$$h(v, w) = g(v, Sw) \quad \text{für alle } v, w \in \mathbb{R}^n. \tag{7.1}$$

Ist h symmetrisch, so ist S selbstadjungiert bezüglich g, das heißt es gilt

$$g(Sv, w) = g(v, Sw) \quad \text{für alle } v, w \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis: Es sei (g^{ij}) die inverse Matrix zu (g_{ij}), das heißt

$$\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\, g^{jk} = \delta_i^k \quad \text{für } i, k = 1, \ldots, n. \tag{7.2}$$

Wir definieren S über die zugehörige Matrix, und zwar sei $Se_l = \sum_{j=1}^n S_l^j e_j$ mit

$$S_l^j = \sum_{k=1}^{n} g^{jk} h_{kl} \quad \text{für } j, l = 1, \ldots, n.$$

Gleichung (7.1) folgt, denn für $v = e_i$ und $w = e_l$ gilt

$$g(e_i, Se_l) = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}\, S_l^j = \sum_{k=1}^{n} \Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} g_{ij}\, g^{jk}}_{=\delta_i^k} \Big) h_{kl} = h_{il}.$$

Die Eindeutigkeit von S mit (7.1) ist offensichtlich, ebenso die Selbstadjungiertheit von S, wenn h symmetrisch ist. □

Definition 7.2 *Sei $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche mit Normale N längs F, und h die zugehörige zweite Fundamentalform. Die eindeutig bestimmte, von $x \in U$ abhängige lineare Abbildung $S(x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit*

$$h(x)(v, w) = g(x)\big(S(x)v, w\big) \quad \textit{für alle } v, w \in \mathbb{R}^2 \tag{7.3}$$

heißt Weingartenabbildung von F. Bezüglich der Standardbasis hat sie die Matrixdarstellung

$$S(x)e_k = \sum_{i=1}^{2} S_k^i(x) e_i \quad \textit{mit } S_k^i(x) = \sum_{j=1}^{2} g^{ij}(x)\, h_{jk}(x). \tag{7.4}$$

Die Weingartenabbildung S ist selbstadjungiert bezüglich g für alle $x \in U$.

Im allgemeinen ist die Standardbasis keine g-Orthonormalbasis, und die Matrix von S bezüglich der Standardbasis ist nicht symmetrisch.

Beispiel 7.1 Für Graphen $F : U \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y) = (x, y, f(x, y))$ haben wir in Beispiel 6.1 und Beispiel 6.2 die Normale und die erste Fundamentalform berechnet:

$$N = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \quad \text{und} \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 + f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y^2 \end{pmatrix}$$

Die zweite Fundamentalform ergibt sich ohne weiteres zu

$$(h_{ij}) = \big(\langle \partial_{ij} F, N \rangle\big) = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}.$$

Für die Berechnung der Weingartenabbildung brauchen wir die Inverse von (g_{ij}):

$$(g^{ij}) = \frac{1}{1 + f_x^2 + f_y^2} \begin{pmatrix} 1 + f_y^2 & -f_x f_y \\ -f_x f_y & 1 + f_x^2 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt nach etwas Rechnung die Matrix der Weingartenabbildung:

$$S = \frac{1}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} (1 + f_y^2)\, f_{xx} - f_x f_y\, f_{xy} & (1 + f_y^2)\, f_{xy} - f_x f_y\, f_{yy} \\ (1 + f_x^2)\, f_{xy} - f_x f_y\, f_{xx} & (1 + f_x^2)\, f_{yy} - f_x f_y\, f_{xy} \end{pmatrix}.$$

Hat der Graph im Punkt $(z_0, f(z_0)) \in U \times \mathbb{R}$ eine horizontale Tangentialebene, das heißt es gilt $Df(z_0) = 0$, so folgt bezüglich der nach oben weisenden Normalen

$$g_{ij}(z_0) = \delta_{ij}, \quad \partial_i g_{jk}(z_0) = 0, \quad S_j^i(z_0) = h_{ij}(z_0) = \partial_{ij}^2 f(z_0). \tag{7.5}$$

Beispiel 7.2 Für eine Rotationsfläche $F(t, \varphi) = (r(t)\cos\varphi, r(t)\sin\varphi, h(t))$ gilt, vergleiche Beispiel 6.3,

$$N = \frac{1}{\sqrt{(r')^2 + (h')^2}} \begin{pmatrix} -h'\cos\varphi \\ -h'\sin\varphi \\ r' \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad DF = \begin{pmatrix} r'\cos\varphi & -r\sin\varphi \\ r'\sin\varphi & r\cos\varphi \\ h' & 0 \end{pmatrix},$$

und ferner

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} (r')^2 + (h')^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich für die zweite Fundamentalform

$$(h_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{(r')^2 + (h')^2}} \begin{pmatrix} r'h'' - h'r'' & 0 \\ 0 & rh' \end{pmatrix},$$

und schließlich die Weingartenabbildung

$$S = \begin{pmatrix} \dfrac{r'h'' - h'r''}{\sqrt{(r')^2 + (h')^2}^3} & 0 \\ 0 & \dfrac{h'}{\sqrt{(r')^2 + (h')^2}} \dfrac{1}{r} \end{pmatrix}.$$

Die geneigten Leser mögen überprüfen: der erste Eintrag in der Matrix von S ist genau die Krümmung der ebenen Kurve $c(t) = (r(t), 0, h(t))$ bezüglich der Normalen $N(t) = N(t, 0)$.

Satz 7.1 (Weingartengleichung) *Sei $F : U \to \mathbb{R}^3$ reguläre C^2-Fläche mit zweiter Fundamentalform h und Weingartenabbildung S bezüglich der Normalen N. Dann gilt*

$$DN = -DF \cdot S \quad \text{und} \quad h(v, w) = -\langle DN \cdot v, DF \cdot w\rangle.$$

Beweis: Für $1 \leq j, k \leq 2$ gilt $\langle \partial_j N, N\rangle = \frac{1}{2}\partial_j |N|^2 = 0$ sowie

$$\langle \partial_j N, \partial_k F\rangle = \partial_j \underbrace{\langle N, \partial_k F\rangle}_{=0} - \langle N, \partial^2_{jk} F\rangle = -h(e_j, e_k) = -g(Se_j, e_k) = -\langle DF \cdot Se_j, DF \cdot e_k\rangle.$$

Es folgt $DN \cdot e_j = -DF \cdot Se_j$, also die erste Behauptung, und weiter

$$h(v, w) = g(Sv, w) = \langle DF \cdot Sv, DF \cdot w\rangle = -\langle DN \cdot v, DF \cdot\rangle.$$

Ebene Kurven konstanter Krümmung sind Geraden oder Kreise, siehe Satz **??**. Wir zeigen nun entsprechende Aussagen für Flächen.

Satz 7.2 *Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ zusammenhängend, und $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine C^2-Fläche mit Normale N und zweiter Fundamentalform h. Dann sind äquivalent:*

(1) *$F(U)$ liegt in einer Ebene.*

(2) $h = 0$.

(3) *N ist konstant.*

Beweis: Liegt $F(U)$ in einer affinen Ebene $p + E$, so bilden $\partial_i F$ eine Basis von E und folglich ist N Normalenvektor von E. Aber $\partial^2_{ij} F$ liegt in E, also $h = \langle D^2 F, N\rangle = 0$.

Aus $h = 0$ bzw. $S = 0$ folgt mit der Weingartengleichung $DN = -DF \cdot S = 0$.

Ist N konstant, so folgt $D\langle F, N\rangle = \langle DF, N\rangle + \langle F, DN\rangle = 0$, also ist $\langle F, N\rangle$ konstant. □

Satz 7.3 *Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ zusammenhängend, $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine C^2-Fläche und $R > 0$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *$F(U)$ liegt in einer Sphäre mit Radius R.*

(2) *$h = \pm\frac{1}{R}g$ bzw. $S = \pm\frac{1}{R}\mathrm{Id}$.*

Beweis: Betrachte für $m \in \mathbb{R}^3$ die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}|F(x) - m|^2$. Es gilt

$$\partial_j f = \langle F - m, \partial_j F\rangle \quad \text{und} \quad \partial^2_{ij} f = \langle F - m, \partial^2_{ij} F\rangle + g_{ij}.$$

Ist m Mittelpunkt der Sphäre in (1), so ist f konstant. Es folgt dann $F - m \perp \operatorname{Bild} DF$, also bei geeigneter Wahl der Normalen $F - m = -RN$, und weiter

$$0 = \partial^2_{ij} f = -\langle R\,N, \partial^2_{ij} F\rangle + g_{ij} = -R\,h_{ij} + g_{ij}.$$

Sei umgekehrt $h = \frac{1}{R}g$ nach geeigneter Wahl der Normalen. Dann folgt aus Satz 7.1, der Weingartengleichung, dass die Funktion $m := F + RN$ konstant ist:

$$\partial_j m = \partial_j F + R\,\partial_j N = \partial_j F - R\,DF \cdot Se_j = \partial_j F - R\,DF \cdot \frac{1}{R}e_j = 0.$$

Wegen $F = m - R\,N$ liegt F damit in der Sphäre $\partial B_R(m)$. $\square$

Satz 7.4 (Transformationsverhalten von h und S) *Sei $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche mit zweiter Fundamentalform h bezüglich der Normalen N.*

(1) *Ist $\tilde{F} = F \circ \phi$ Umparametrisierung mit einem C^2-Diffeomorphismus $\phi : V \to U$, so folgt für die zweite Fundamentalform von $\tilde{F}$ bzgl. der Normalen $\tilde{N} = N \circ \phi$*

$$\tilde{h}(v, w) = h \circ \phi(D\phi \cdot v, D\phi \cdot w) \quad \textit{bzw.} \quad \tilde{h}_{ij} = \sum_{k,l=1}^{2} h_{kl} \circ \phi\, \partial_i \phi^k \partial_j \phi^l,$$

oder äquivalent für die Weingartenabbildung

$$\tilde{S} = (D\phi)^{-1}\,(S \circ \phi)\,D\phi.$$

(2) *Unter einer Euklidischen Bewegung $\tilde{F} = QF + a$ mit $Q \in \mathbb{O}(3)$, $a \in \mathbb{R}^3$ folgt $\tilde{h} = h$ und $\tilde{S} = S$, bzgl. der Normalen $\tilde{N} = QN$.*

Beweis: Aus Satz 7.1, der Weingartengleichung, erhalten wir

$$\tilde{h}(v, w) = -\langle D\tilde{N}\cdot v, D\tilde{F}\cdot w\rangle = -\langle (DN)\circ\phi\, D\phi\cdot v, (DF)\circ\phi\, D\phi\cdot w\rangle = h\circ\phi(D\phi\cdot v, D\phi\cdot w).$$

Die Koordinatendarstellung ergibt sich hieraus wie in Satz 6.1 durch Einsetzen von e_i, e_j. Weiter folgt mit Definition 7.2 und Satz 6.1

$$\begin{aligned}
\tilde{h}(x)(v, w) &= h(\phi(x))(D\phi(x)v, D\phi(x)w) \\
&= g(\phi(x))(S(\phi(x))D\phi(x)v, D\phi(x)w) \\
&= g(\phi(x))(D\phi(x)D\phi(x)^{-1}S(\phi(x))D\phi(x)v, D\phi(x)w) \\
&= \tilde{g}(x)(D\phi(x)^{-1}S(\phi(x))D\phi(x)v, w).
\end{aligned}$$

Mit Definition 7.2 folgt die Transformationsformel für S. Für Behauptung (2) berechnen wir

$$\tilde{h}_{ij}(x) = \langle \partial^2_{ij}(QF + a)(x), QN(x)\rangle = \langle Q\,\partial^2_{ij}F(x), QN(x)\rangle = h_{ij}(x).$$

Die Gleichheit $\tilde{S} = S$ folgt nun aus Satz 6.1(2) und Definition 7.2. □

Zu jedem Punkt $x \in U$ existiert eine Basis v_1, v_2 von $\mathbb{R}^2$ mit

$$(7.6) \qquad g(x)(v_i, v_j) = \delta_{ij} \quad \text{und} \quad h(x)(v_i, v_j) = \varkappa_i \delta_{ij} \quad \text{für gewisse } \varkappa_{1,2} \in \mathbb{R}.$$

Dies ist eine wohlbekannte Tatsache aus der linearen Algebra, doch der nachfolgende Beweis ist instruktiv. Sei $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2$ eine Orthonormalbasis bezüglich $g(x)$; eine solche Basis kann aus einer beliebigen Basis mit dem Verfahren von Gram-Schmidt hergestellt werden. Jeder Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v\|_{g(x)} = 1$ besitzt dann eine Darstellung $v = (\cos t)w_1 + (\sin t)w_2$ mit $t \in [0, 2\pi]$, und es gilt

$$h(x)(v,v) = h(x)(w_1,w_1)\,\cos^2 t + h(x)(w_2,w_2)\,\sin^2 t + 2\,h(x)(w_1,w_2)\,\sin t \cos t.$$

Die rechte Seite ist 2π-periodisch und stetig in t, hat also an einer Stelle $t_1 \in [0, 2\pi)$ ein Minimum. Die Vektoren $v_1 = \cos(t_1)w_1 + \sin(t_1)w_2$ und $v_2 = -\sin(t_1)w_1 + \cos(t_1)w_2$ bilden auch eine $g(x)$-Orthonormalbasis, und

$$0 = \frac{d}{d\tau} h(x)\big((\cos\tau)v_1 + (\sin\tau)v_2, (\cos\tau)v_1 + (\sin\tau)v_2\big)|_{\tau=0} = 2\,h(x)(v_1, v_2).$$

Also sind v_1, v_2 wie in (7.6) verlangt. Weiter gilt für $v = (\cos t)v_1 + (\sin t)v_2$

$$h(x)(v,v) = \varkappa_1 \cos^2 t + \varkappa_2 \sin^2 t \in [\varkappa_1, \varkappa_2] \quad \text{mit } \varkappa_i = h(x)(v_i, v_i) \text{ für } i = 1, 2,$$

das heißt die Funktion $v \mapsto h(x)(v,v)$ hat unter der Nebenbedingung $\|v\|_{g(x)} = 1$ in $v = v_1$ das Minimum $h(x)(v_1, v_1) = \varkappa_1$ und in $v = v_2$ das Maximum $h(x)(v_2, v_2) = \varkappa_2$. Wegen

$$g(x)(S(x)v_i, v_j) = h(x)(v_i, v_j) = \varkappa_i \delta_{ij} = g(x)(\varkappa_i v_i, v_j)$$

sind die $v_{1,2}$ genau die Eigenvektoren der Weingartenabbildung zu den Eigenwerten $\varkappa_{1,2}$.

Definition 7.3 (Hauptkrümmungen) *Sei $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ eine Fläche mit erster Fundamentalform g und Weingartenabbildung S. Die beiden Eigenwerte $\varkappa_1, \varkappa_2$ von $S(x)$ heißen Hauptkrümmungen von F im Punkt $x \in U$, die zugehörigen Eigenvektoren von $S(x)$ mit Normierung $\|v\|_{g(x)} = 1$ heißen Hauptkrümmungsrichtungen. Ferner heißen*

$$H = \varkappa_1 + \varkappa_2 \quad \text{und} \quad K = \varkappa_1 \varkappa_2$$

mittlere Krümmung bzw. Gaußsche Krümmung von F in $x \in U$.*

*Oft wird H als arithmetisches Mittel definiert, also $H = \frac{1}{2}(\varkappa_1 + \varkappa_2)$.

Die Hauptkrümmungen hängen nicht von der Wahl der Parametrisierung ab, sie sind geometrische Invarianten: sei $\tilde{F} = F \circ \phi$ eine Umparametrisierung der Fläche $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ mit dem Diffeomorphismus $\phi \in C^2(V, U)$. Ist $v \in \mathbb{R}^2$ Hauptkrümmungsrichtung von $\tilde{F}$ mit Hauptkrümmung $\varkappa$ im Punkt $x \in V$, so folgt

$$\|D\phi(x)v\|_{g(\phi(x))} = \|v\|_{\tilde{g}(x)} = 1,$$

$$S(\phi(x))D\phi(x)v = D\phi(x)\tilde{S}(x)D\phi(x)^{-1}D\phi(x)v = \varkappa\, D\phi(x)v.$$

Also ist $D\phi(x)v$ Hauptkrümmungsrichtung von F im Punkt $\phi(x)$ zum gleichen Eigenwert. Beachten Sie $DF(\phi(x)D\phi(x)v = D\tilde{F}(x)v$, das heißt v und $D\phi(x)v$ entsprechen demselben Tangentialvektor der Fläche in $\mathbb{R}^3$.

Beispiel 7.3 Für das Helikoid $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $F(s,t) = (s\cos t, s\sin t, at)$, mit $a > 0$ gilt

$$\partial_1 F = (\cos t, \sin t, 0), \quad \partial_2 F = (-s\sin t, s\cos t, a), \quad N = \frac{1}{(s^2+a^2)^{1/2}}(a\sin t, -a\cos t, s),$$

und weiter

$$\partial_{11} F = (0,0,0), \quad \partial_{12} F = \partial_{21} F = (-\sin t, \cos t, 0), \quad \partial_{22} F = -(s\cos t, s\sin t, 0).$$

Für die erste und zweite Fundamentalform ergibt sich

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^2+a^2 \end{pmatrix}, \quad (h_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{a}{\sqrt{s^2+a^2}} \\ -\dfrac{a}{\sqrt{s^2+a^2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt für die Weingartenabbildung und die Hauptkrümmungsrichtungen

$$S = -\frac{a}{s^2+a^2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{s^2+a^2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{s^2+a^2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad v_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{s^2+a^2}} \end{pmatrix}.$$

Insbesondere hat das Helikoid die mittlere Krümmung bzw. Gaußsche Krümmung

$$H = 0 \quad \text{und} \quad K = -\Big(\frac{a}{s^2+a^2}\Big)^2.$$

Beispiel 7.4 Die Rotationsfläche $F(t,\varphi) = (r(t)\cos\varphi, r(t)\sin\varphi, h(t))$ hat als Hauptkrümmungsrichtungen

$$v_1 = \frac{e_1}{\sqrt{(r')^2+(h')^2}} \quad \text{und} \quad v_2 = \frac{e_2}{r(t)},$$

mit zugehörigen Hauptkrümmungen

$$\varkappa_1 = \frac{r'h'' - h'r''}{\sqrt{(r')^2+(h')^2}^3} \quad \text{und} \quad \varkappa_2 = \frac{h'}{\sqrt{(r')^2+(h')^2}}\,\frac{1}{r}.$$

Beispiel 7.5 Die mittlere und Gaußsche Krümmung einer in Graphendarstellung gegebenen Fläche $F : U \to \mathbb{R}^3$, $F(x,y) = (x,y,f(x,y))$ lauten

$$\begin{aligned} H &= \frac{(1+f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1+f_x^2)f_{yy}}{(1+f_x^2+f_y^2)^{3/2}}, \\ K &= \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1+f_x^2+f_y^2)^2}. \end{aligned}$$

Anstatt von einer gegebenen Fläche auszugehen und deren Krümmungen zu berechnen, kann man umgekehrt das Problem betrachten, eine Fläche mit vorgeschriebener Krümmungsfunktion zu bestimmen: zu einer gegebenen Funktion $H : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $H = H(x,y,z)$ sucht man also einen Graphen $F : U \to \mathbb{R}^3$, $F(x,y) = (x,y,f(x,y))$, der in jedem Punkt $F(x,y)$ die mittlere Krümmung $H(F(x,y))$ hat. Analog kann man die Gaußsche Krümmung als Funktion $K : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $K = K(x,y,z)$, vorschreiben. Gesucht sind dann also Lösungen der Gleichung vorgeschriebener mittlerer Krümmung

$$\frac{(1+f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1+f_x^2)f_{yy}}{(1+f_x^2+f_y^2)^{3/2}} = H(x,y,f(x,y))$$

bzw. der Monge-Ampére Gleichung

$$\frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1+f_x^2+f_y^2)^2} = K(x,y,f(x,y)).$$

Diese Probleme haben die Entwicklung der Theorie partieller Differentialgleichungen im 20. Jahrhundert maßgeblich beeinflusst.

Wir wollen nun ähnlich wie bei Kurven eine lokale Normalform für Flächen herleiten.

Satz 7.5 (Lokale Normalform von Flächen) *Sei $\tilde{F} \in C^k(V,\mathbb{R}^3)$, $k \geq 1$, reguläre Fläche und $B(X) = Q\big(X - \tilde{F}(w_0)\big)$ für $Q \in \mathbb{O}(3)$ mit $Q\big(\mathrm{Bild}\, D\tilde{F}(w_0)\big) = \mathbb{R}^2$. Dann gibt es eine Umgebung $W \subset V$ von w_0, einen C^k-Diffeomorphismus $\phi : W \to U$ mit $\phi(w_0) = 0$ und eine Funktion $f \in C^k(U)$ mit $f(0) = 0$, $Df(0) = 0$, so dass für $F = B \circ \tilde{F} \circ \phi^{-1} : U \to \mathbb{R}^3$ gilt:*

$$F(x,y) = (x,y,f(x,y)) \quad \textit{für alle } (x,y) \in U.$$

Ist $\tilde{F} \in C^2(V,\mathbb{R}^3)$, so gilt bei geeigneter Wahl von Q außerdem die Entwicklung

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\big(\varkappa_1 x^2 + \varkappa_2 y^2\big) + o(x^2+y^2).$$

Dabei sind $\varkappa_{1,2}$ die Hauptkrümmungen von F im Nullpunkt bezüglich der Normalen e_3.

Bemerkung. Die $\varkappa_{1,2}$ sind auch die Hauptkrümmungen der gegebenen Fläche $\tilde{F}$ im Punkt w_0 bezüglich der Normalen $Q^{-1}e_3$. Dies folgt direkt aus der Invarianz gegenüber Umparametrisierungen und Euklidischen Bewegungen.

BEWEIS: Sei π die Projektion auf $\mathbb{R}^2 \times \{0\} = \mathbb{R}^2$. Es gilt

$$B(\tilde{F}(w_0)) = 0 \quad \text{und} \quad \ker D(\pi \circ B \circ \tilde{F})(w_0) = \ker\big(\pi \circ Q \circ D\tilde{F}(w_0)\big) = \{0\}.$$

Nach dem Umkehrsatz gibt es eine Umgebung W von w_0, so dass $\phi := \pi \circ B \circ \tilde{F} : W \to \phi(W) =: U$ ein C^k-Diffeomorphismus ist mit $\phi(w_0) = 0$. Nun folgt für $F = B \circ \tilde{F} \circ \phi^{-1}$

$$\pi \circ F = (\pi \circ B \circ \tilde{F}) \circ \phi^{-1} = \mathrm{id}_U.$$

Also gilt $F(x,y) = (x, y, f(x,y))$ mit $f = F^3 \in C^k(U)$. Weiter folgt $F(0) = B(\tilde{F}(\phi^{-1}(0))) = B(\tilde{F}(w_0)) = 0$, insbesondere $f(0) = F^3(0) = 0$, und wegen $DF(0) = Q\, D\tilde{F}(w_0)\, D\phi^{-1}(0)$

$$\operatorname{Bild} DF(0) \subset Q\big(\operatorname{Bild} D\tilde{F}(w_0)\big) = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \quad \Rightarrow \quad Df(0) = DF^3(0) = 0.$$

Damit ist die erste Behauptung gezeigt. Für die zweite drehen wir die Fläche noch um die z-Achse. Seien $v_{1,2}$ die Hauptkrümmungsrichtungen von F im Nullpunkt. Dann gilt

$$\delta_{ij} = \langle DF(0)v_i, DF(0)v_j\rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle v_i, v_j\rangle_{\mathbb{R}^2}.$$

Also ist durch $Rv_i = e_i$, $i = 1,2$, eine Abbildung $R \in \mathbb{O}(2)$ definiert. Bezeichne mit $Q_R \in \mathbb{O}(3)$ die Fortsetzung mit $Q_R e_3 = e_3$. Dann ist $Q_R F$ Graph der Funktion $f_R = f \circ R^{-1}$ auf der Menge $R(U)$. Es gilt $f_R(0) = 0$, $Df_R(0) = 0$, sowie für alle $v \in \mathbb{R}^2$

$$D^2 f_R(0)(v,v) = \frac{d^2}{ds^2} f_R(sv)|_{s=0} = \frac{d^2}{ds^2} f(sR^{-1}v)|_{s=0} = D^2 f(0)(R^{-1}v, R^{-1}v).$$

Nach Polarisationsformel folgt $D^2 f_R(0)(v,w) = D^2 f(0)(Rv, Rw)$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$. Nun ist $D^2 f(0) = h(0)$ die zweite Fundamentalform von F im Punkt $z = 0$ bezüglich der Normalen e_3, siehe (7.5). Es ergibt sich nach Wahl von R

$$D^2 f_R(0)(e_i, e_j) = D^2 f(0)(R^{-1}e_i, R^{-1}e_j) = h(0)(v_i, v_j) = \varkappa_i \delta_{ij}.$$

Betrachten wir statt F die Fläche $Q_R F$ und beachten die Invarianz der Hauptkrümmungen unter Q_R, so folgt die behauptete Entwicklung. $\square$

Sei $F : U \to \mathbb{R}^3$, $F(z) = (z, f(z))$ eine in lokaler Normalform gegebene Fläche, und N Einheitsnormale mit $N(0) = e_3$. Dann können wir die zweite Fundamentalform $h(0)$ bzw. genauer ihre quadratische Form $h(0)(v,v)$ wie folgt geometrisch interpretieren. Für $v \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v\|_{g(0)} = |v| = 1$ heißt

$$\gamma : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^3,\ \gamma(s) = F(sv) = (sv, f(sv))$$

Normalschnitt bei $0 \in U$ in Richtung v. Es gilt $\gamma'(0) = v$, und γ verläuft in der durch v, e_3 aufgespannten Ebene E. Bezüglich der Normalen e_3 hat der Normalschnitt γ die Krümmung

$$\varkappa = \langle \gamma''(0), e_3\rangle = D^2 f(0)(v,v) = h(0)(v,v).$$

Ist $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ beliebige reguläre Fläche und $\|v\|_{g(x)} = 1$, so heißt $h(x)(v,v)$ Normalkrümmung von F im Punkt x in Richtung v. Sind $\varkappa_{1,2}$ die Hauptkrümmungen zu den Hauptkrümmungsrichtungen $v_{1,2}$, so gilt

$$h(x)(v,v) = \cos^2(t)\varkappa_1 + \sin^2(t)\varkappa_2 \quad \text{für } v = \cos(t)v_1 + \sin(t)v_2.$$

Die Hauptkrümmungen sind also die Extremwerte der Normalkrümmung. Dies hatten wir schon bei der Definition der Hauptkrümmungen festgestellt, siehe (7.6).

Bei der folgenden Definition sei daran erinnert, dass die Gaußsche Krümmung als Produkt der beiden Hauptkrümmungen bzw. Determinante der Weingartenabbildung nicht von der Wahl der Normalen abhängt.

Definition 7.4 *Sei $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre C^2-Fläche mit Gaußscher Krümmung K. Der Punkt $x \in U$ heißt*

$$\begin{aligned} \textit{elliptisch} \quad &\Leftrightarrow \quad K(x) > 0, \\ \textit{hyperbolisch} \quad &\Leftrightarrow \quad K(x) < 0, \\ \textit{parabolisch} \quad &\Leftrightarrow \quad K(x) = 0. \end{aligned}$$

Folgerung 7.1 *Sei $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre C^2-Fläche mit Normale N und Gaußscher Krümmung K. Dann gelten für $z_0 \in U$ folgende Aussagen:*

(1) *Ist $K(z_0) > 0$, so gibt es eine Umgebung V von z_0 mit $\langle F(z) - F(z_0), N(z_0)\rangle \neq 0$ für alle $z \in V\backslash\{z_0\}$, das heißt F liegt lokal auf einer Seite der affinen Tangentialebene.*

(2) *Ist $K(z) < 0$, so hat dagegen die Funktion $z \mapsto \langle F(z) - F(z_0), N(z_0)\rangle$ in jeder Umgebung von z_0 sowohl strikt positive als auch strikt negative Werte.*

Beweis: Wir können annehmen, dass F in Normalform gegeben ist, das heißt es ist $z_0 = 0$, $N(z_0) = e_3$ und $F(z) = (z, f(z))$ mit

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\big(\varkappa_1 x^2 + \varkappa_2 y^2\big) + o(x^2 + y^2).$$

Es gilt dann $\langle F(z) - F(z_0), N(z_0)\rangle = f(z)$. Betrachte nun eine Folge $z_k = (x_k, y_k) \neq 0$ mit $z_k \to 0$. Nach Übergang zu einer Teilfolge gilt dann $z_k/|z_k| \to (\xi, \eta) \in \mathbb{S}^1$, und es folgt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(z_k)}{|z_k|^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{2}\big(\varkappa_1 x_k^2 + \varkappa_2 y_k^2\big)}{|z_k|^2} = \frac{1}{2}\big(\varkappa_1\xi^2 + \varkappa_2\eta^2\big).$$

Ist zum Beispiel $\varkappa_{1,2} > 0$ in $z_0 = 0$, so zeigt ein Widerspruchsargument $f(z) > 0$ für $z \neq 0$ nahe bei $z_0 = 0$. Ist dagegen $\varkappa_1 < 0 < \varkappa_2$ in $z_0 = 0$, so folgt direkt $f(se_1) < 0$ und $f(se_2) > 0$ für s hinreichend klein. $\square$

Definition 7.5 *Sei $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre C^2-Fläche mit Normale N und erster bzw. zweiter Fundamentalform g bzw. h. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v\|_{g(x)} = 1$ heißt Asymptotenrichtung im Punkt $x \in U$, falls $h(x)(v,v) = 0$.*

Seien $\varkappa_1 \leq \varkappa_2$ die beiden Hauptkrümmungen in $x \in U$, mit Hauptkrümmungsrichtungen v_1 und v_2, und $K(x) = \varkappa_1 \varkappa_2$ die Gaußsche Krümmung in $x \in U$. Die folgende Tabelle gibt die Asymptotenrichtungen v (bis aufs Vorzeichen) an:

$$
\begin{array}{lll}
K(x) < 0 & \varkappa_1 < 0 < \varkappa_2 & v = \sqrt{\dfrac{\varkappa_2}{\varkappa_2 - \varkappa_1}}v_1 \pm \sqrt{\dfrac{-\varkappa_1}{\varkappa_2 - \varkappa_1}}v_2, \\
K(x) > 0 & \varkappa_{1,2} > 0,\ \varkappa_{1,2} < 0 & \text{es gibt keine Asymptotenrichtungen}, \\
K(x) = 0 & \varkappa_1 = 0 < \varkappa_2 & v = v_1, \\
 & \varkappa_1 < 0 = \varkappa_2 & v = v_2, \\
 & \varkappa_1 = \varkappa_2 = 0 & v \text{ beliebig.}
\end{array}
$$

Definition 7.6 *Sei $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine C^2-Fläche. Eine reguläre Kurve $\gamma : I \to U$ heißt*

$$
\begin{array}{rcl}
\textit{Krümmungslinie} & \Leftrightarrow & \dfrac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \textit{ ist Hauptkrümmungsrichtung für alle } t \in I, \\
\textit{Asymptotenlinie} & \Leftrightarrow & \dfrac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \textit{ ist Asymptotenrichtung für alle } t \in I.
\end{array}
$$

Beispiel 7.6 Sei $F : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $F(t, \varphi) = (r(t)\cos\varphi, r(t)\sin\varphi, h(t))$ eine Rotationsfläche. Für festes $\varphi \in \mathbb{R}$ ist die Kurve $t \mapsto (t, \varphi)$ eine Krümmungslinie, ebenso für festes $t \in I$ die Kurve $\varphi \mapsto (t, \varphi)$. Dies folgt daraus, dass in der gegebenen Parametrisierung die Weingartenabbildung diagonalisiert ist, siehe Beispiel 7.4.

8 Die Gleichungen $H = 0$ und $K = 0$

In diesem Kapitel wollen wir einen Blick auf die beiden Gleichungen $H = 0$ beziehungsweise $K = 0$ werfen, und damit als Beispielklassen die Minimalflächen und die Regelflächen einführen. Die Minimalflächen treten in der Natur als Seifenhäute auf, die in einen Draht eingespannt sind. Die Seifenhaut minimiert unter dieser Nebenbedingung ihre Oberfläche und befindet sich deshalb in einem Spannungsgleichgewicht. Genau diesen Aspekt wollen wir mathematisch erfassen. Wir beginnen mit zwei Hilfsaussagen, die aber von allgemeinem Interesse sind.

Lemma 8.1 (Zerlegung in Normal- und Tangentialkomponente) *Sei $F \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche mit Normale N und erster Fundamentalform g. Dann gibt es zu jeder vektorwertigen Funktion $X : U \to \mathbb{R}^3$ ein eindeutig bestimmtes Vektorfeld $\xi : U \to \mathbb{R}^2$ mit $X = DF \cdot \xi + \langle X, N\rangle N$, und zwar gilt, wenn (g^{ij}) die inverse Matrix zu (g_{ij}) bezeichnet,*

$$\xi = \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} \langle X, \partial_i F\rangle e_j,$$

Ist $F \in C^{k+1}(U, \mathbb{R}^3)$ und $X \in C^k(U, \mathbb{R}^3)$, so ist $\xi \in C^k(U, \mathbb{R}^3)$.

Beweis: Die Eindeutigkeit ist klar wegen $\ker DF = \{0\}$. Für ξ wie in der Behauptung folgt

$$\langle DF \cdot \xi, \partial_k F\rangle = \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} \langle X, \partial_i F\rangle \langle \partial_j F, \partial_k F\rangle = \sum_{i,j=1}^{2} \langle X, \partial_i F\rangle g^{ij} g_{jk} = \langle X, \partial_k F\rangle.$$

Hieraus folgt leicht $X = DF \cdot \xi + \langle X, N\rangle N$. □

Als zweites brauchen wir die wohlbekannte Regel für die Ableitung der Determinante. Im Fall $n = 2$ kann diese auch explizit überprüft werden, da die Formeln für die Determinante und die inverse Matrix sehr einfach sind.

Lemma 8.2 *Ist $G : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ in $t = 0$ differenzierbar und $\det G(0) \neq 0$, so gilt*

$$\frac{d}{dt} \det G|_{t=0} = \det G(0) \operatorname{tr} \big(G(0)^{-1} G'(0)\big).$$

Beweis: Betrachte erst den Fall $G(0) = \mathrm{E}_n$. Nach Leibniz gilt

$$\det G = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) g_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot g_{n\sigma(n)}.$$

Für $\sigma \neq \mathrm{id}$ ist $\sigma(i) \neq i$, also $g_{i\sigma(i)}(0) = 0$, für mindestens zwei $i \in \{1, \ldots, n\}$. Also folgt aus der Produktregel

$$\frac{d}{dt} \det G|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} g'_{ii}(0) = \operatorname{tr} G'(0).$$

Für $G(0) \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ verwende $\det G(t) = \det G(0) \det \big(G(0)^{-1} G(t)\big)$. Mit $\big(G(0)^{-1} G\big)'(0) = G(0)^{-1} G'(0)$ folgt die gewünschte Formel

$$\frac{d}{dt} \det G|_{t=0} = \det G(0) \operatorname{tr} \big(G(0)^{-1} G'(0)\big).$$

□

Als drittes benötigen wir das Integral von Funktionen auf einer Fläche. Für eine C^1-Fläche $F : U \to \mathbb{R}^3$ mit erster Fundamentalform g und eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ schreiben wir

(8.1) $$\int_U f \, dA_g = \int_U f \sqrt{\det G} \quad \text{für } G = (g_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2},$$

falls das rechte Integral im Sinn von Riemann oder Lebesgue definiert ist. In diesem Zusammenhang nennt man dA_g auch das induzierte Flächenelement von F. Präzise ist durch $A_g(E) = \int_E \sqrt{\det G}$ ein Maß auf U definiert, und (8.1) ist einfach das Integral bezüglich dieses Maßes. Bei einer Umparametrisierung $\tilde{F} = F \circ \phi$ mit $\phi \in C^1(V, U)$ liefert Satz 6.1 in Verbindung mit dem Transformationssatz

$$\int_V f \circ \phi \, dA_{\tilde{g}} = \int_V (f \sqrt{\det G}) \circ \phi \, |\det D\phi| = \int_U f \, dA_g \quad \text{für } f : U \to \mathbb{R}.$$

Das Integral ist also invariant unter Umparametrisierungen, vergleiche (6.1).

Definition 8.1 *Sei $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre C^2-Fläche mit mittlerer Krümmung H bezüglich der Normalen N. Der mittlere Krümmungsvektor von F ist dann die Funktion*

$$\vec{H} = HN : U \to \mathbb{R}^3.$$

$\vec{H}$ ist unabhängig von der Wahl der Normalen N definiert.

Die folgende Variationsformel für den Flächeninhalt sollte mit der entsprechenden Variationsformel für die Bogenlänge aus Satz 2.3 verglichen werden. Anstelle des Krümmungsvektors der Kurve tritt jetzt der mittlere Krümmungsvektor der Fläche. Um die Sache zu vereinfachen, geben wir hier eine Version ohne Randterme.

Satz 8.1 (Erste Variation des Flächeninhalts) *Sei $F(\cdot,t) : U \to \mathbb{R}^3$, $t \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, eine Einparameterschar von regulären Flächen, so dass gilt:*

(1) *$F \in C^2(U \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0), \mathbb{R}^3)$,*

(2) *$F(\cdot,0)$ ist regulär und $A\big(F(\cdot,0)\big) < \infty$,*

(3) *Es gibt eine kompakte Menge $K \subset U$, so dass $F(\cdot,t) = F(\cdot,0)$ auf $U \backslash K$.*

Dann ist $F(\cdot,t)$ regulär für $|t|$ hinreichend klein, und mit $\phi = \partial_t F|_{t=0}$ gilt

$$\frac{d}{dt} A(F)|_{t=0} = -\int_U \langle \vec{H}, \phi \rangle \, dA_g.$$

Beweis: Die Regularität von $F(\cdot,t)$ für $|t|$ klein folgt leicht mit einem Widerspruchsargument aus (2) und (3). Wir berechnen als erstes

$$\partial_t g_{ij} = \partial_t \langle \partial_i F, \partial_j F \rangle = \langle \partial_i \phi, \partial_j F \rangle + \langle \partial_i F, \partial_j \phi \rangle.$$

Mit Lemma 8.2 gilt weiter

$$\partial_t \sqrt{\det G} = \frac{1}{2} \sqrt{\det G} \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} \partial_t g_{ji} = \sqrt{\det G} \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} \langle \partial_j F, \partial_i \phi \rangle.$$

Durch Differentiation unter dem Integral und partielle Integration folgt

$$\frac{d}{dt} A(F)|_{t=0} = -\int_U \langle \Delta_g F, \phi \rangle \, dA_g. \tag{8.2}$$

Wir zeigen als erstes für eine reguläre Fläche $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$

$$\int_U \langle \Delta_g F, \phi \rangle \, dA_g = 0 \quad \text{für } \phi = DF \cdot \xi \text{ mit } \xi \in C^1_c(U, \mathbb{R}^2). \tag{8.3}$$

Mittels Glättung können wir $\xi \in C^\infty_c(U, \mathbb{R}^2)$ annehmen. Betrachte nun den Fluss $\psi \in C^\infty(U \times (-\delta, \delta), U)$, $\psi = \psi(x,s)$, definiert durch

$$\frac{\partial}{\partial s} \psi(x,s) = \xi(\psi(x,s)), \quad \psi(x,0) = x.^*$$

*Es kann alternativ $\psi(x,s) = x + s\xi(x)$ für $|s|$ klein gewählt werden.

Dann ist $\psi(\cdot,s) : U \to U$ diffeomorph und $\psi(x,s) = x$ für $x \notin \operatorname{spt}\xi$. Da der Flächeninhalt unter Umparametrisierungen invariant ist, folgt mit (8.2)

$$0 = \frac{d}{ds} A(F \circ \psi(\cdot,s))|_{s=0} = \int_U \big\langle \Delta_g F, \frac{\partial}{\partial s} F \circ \psi(\cdot,s)|_{s=0} \big\rangle \, dA_g = \int_U \langle \Delta_g F, \phi \rangle \, dA_g.$$

Als zweites zeigen wir, ebenfalls für $F \in C^2(U,\mathbb{R}^3)$ regulär,

$$\text{(8.4)} \qquad \int_U \langle \Delta_g F, \phi \rangle \, dA_g = \int_U H\varphi \, dA_g \quad \text{für } \phi = \varphi N \text{ mit } \varphi \in C^1_c(U).$$

Und zwar folgt mit partieller Integration und der Weingartengleichung

$$\begin{aligned}
\int_U \langle \Delta_g F, \phi \rangle \, dA_g &= \int_U \sum_{i,j=1}^2 \langle \partial_i (\sqrt{\det G} g^{ij} \partial_j F), \varphi N \rangle \, dx \\
&= -\int_U \sum_{i,j=1}^2 g^{ij} \langle \partial_j F, \partial_i (\varphi N) \rangle \, dA_g \\
&= \int_U \sum_{i,j=1}^2 g^{ij} h_{ij} \, \varphi \, dA_g.
\end{aligned}$$

Nach Lemma 8.1 hat jedes $\phi \in C^1_c(U,\mathbb{R}^3)$ die Form $\phi = DF \cdot \xi + \varphi N$ mit ξ, φ wie in (8.3), (8.4), also folgt

$$\int_U \langle \Delta_g F, \phi \rangle \, dA_g = \int_U H\varphi \, dA_g = \int_U \langle \vec{H}, \phi \rangle \, dA_g.$$

Der Satz folgt nun aus (8.2). □

Bemerkung 8.1 Mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung folgt

$$\vec{H} = \Delta_g F.$$

Definition 8.2 *Eine reguläre Fläche $F \in C^2(U,\mathbb{R}^3)$ mit mittlerer Krümmung $H \equiv 0$ heißt Minimalfläche.*

Die untenstehende Folgerung besagt, dass die Minimalflächengleichung $H = 0$ äquivalent dazu ist, dass die Ableitung des Flächeninhalts für alle Variationen mit kompaktem Träger gleich Null ist. Sie folgt direkt aus Satz 8.1 mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung. Analog zu der Situation bei Extremwerten reeller Funktionen bedeutet die Bedingung nicht, dass der Flächeninhalt tatsächlich minimiert wird, es ist nur eine notwendige Bedingung.

Folgerung 8.1 (Variationscharakterisierung der Minimalflächen) *Für eine reguläre C^2-Fläche $F : U \to \mathbb{R}^3$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) $H = 0$.

(2) $\frac{d}{dt} A(F + t\phi)|_{t=0} = 0$ *für alle* $\phi \in C^\infty_c(U,\mathbb{R}^3)$.

Eine Minimalfläche haben wir bereits kennengelernt, das Helikoid aus Beispiel 7.3. Hier ist noch eine.

Beispiel 8.1 (Katenoid) Für eine Rotationsfläche

$F : (a,b)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $F(z,\varphi) = (r(z)\cos\varphi, r(z)\sin\varphi, z)$, wobei $r : (a,b) \to (0,\infty)$,

ergibt sich nach Beispiel 6.3

$$\vec{H} = \frac{1}{r\sqrt{(r')^2+1}}\left(\partial_z\Big(\frac{r}{\sqrt{(r')^2+1}}\partial_z F\Big) + \partial_\varphi\Big(\frac{\sqrt{(r')^2+1}}{r}\partial_\varphi F\Big)\right).$$

Sei nun F eine Minimalfläche. Wegen $\partial_\varphi F^3 = 0$ folgt aus $\vec{H}^3 = 0$

$$\frac{d}{dz}\frac{r}{\sqrt{(r')^2+1}} = 0.$$

Die Gleichung wird gelöst durch die Funktionen

$$r_{a,z_0}(z) = a\cosh\frac{z-z_0}{a} \quad \text{mit } a > 0,\ z_0 \in \mathbb{R}.$$

Bis auf vertikale Translationen und Streckungen beschreiben diese Funktionen nur eine Fläche, das sogenannte Katenoid. Eine genauere Analyse zeigt, dass das Katenoid und die Ebene die einzigen Rotationsminimalflächen sind.

Beispiel 8.2 Der mittlere Krümmungsvektor eines Graphen $F : U \to \mathbb{R}^3$, $F(x,y) = (x,y,u(x,y))$ lautet mit $v = \sqrt{1+u_x^2+u_y^2}$

$$\begin{aligned}
\vec{H}^1 &= \frac{1}{v}\left(\Big(\frac{1+u_y^2}{v}\Big)_x - \Big(\frac{u_x u_y}{v}\Big)_y\right)\\
\vec{H}^2 &= \frac{1}{v}\left(-\Big(\frac{u_x u_y}{v}\Big)_x + \Big(\frac{1+u_x^2}{v}\Big)_y\right)\\
\vec{H}^3 &= \frac{1}{v}\left(\Big(\frac{u_x}{v}\Big)_x + \Big(\frac{u_y}{v}\Big)_y\right).
\end{aligned}$$

Insbesondere erhalten wir wegen $\vec{H}^3 = HN^3 = H/v$ folgende Darstellung der mittleren Krümmung, vgl. Beispiel 7.5,

$$H = \operatorname{div}\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}.$$

Bemerkung 8.2 Jede reguläre Fläche $F \in C^2(U,\mathbb{R}^3)$ kann lokal winkeltreu parametrisiert werden, das heißt $g_{ij} = \lambda^2\delta_{ij}$ mit $\lambda : U \to (0,\infty)$. Es folgt dann

$$\vec{H} = \Delta_g F = \frac{1}{\lambda^2}\Delta F \quad \text{mit } \Delta F = F_{xx} + F_{yy}.$$

Hierdurch ergibt sich ein enger Bezug zweidimensionaler Minimalflächen zur Funktionentheorie: es gilt $H = 0$ genau wenn F klassisch harmonisch und damit Realteil einer holomorphen Funktion ist. Wir sehen auch, dass F in dieser Parametrisierung glatt ist und lokal durch seine Taylorreihe dargestellt wird.

Bevor wir zur Gleichung $K = 0$ kommen, untersuchen wir Flächen, die durch eine einparametrige Schar von Geraden gegeben sind, sogenannte Regelfächen. Wir arbeiten dabei im C^∞-Kontext nur aus Gründen der Einfachheit.

Definition 8.3 *Seien $c, V \in C^\infty(I, \mathbb{R}^3)$ mit $|V| \equiv 1$. Dann heißt*

$$F : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ F(s,t) = c(s) + tV(s),$$

die von c, V erzeugte Regelfäche, und $c(s)$ heißt Leitkurve.

Es ist nicht zu erwarten, dass die so definierten Regelflächen überall regulär sind. Wir können aber genau angeben, wo nicht. Mit $' = \frac{d}{ds}$ gilt $\partial_1 F = c' + tV'$ und $\partial_2 F = V$. Wegen $\langle V, V' \rangle = 0$ lautet die erste Fundamentalform

$$\begin{aligned} G &= \begin{pmatrix} |c' + tV'|^2 & \langle c', V \rangle \\ \langle c', V \rangle & 1 \end{pmatrix}, \\ \det G &= |c' + tV'|^2 - \langle c', V \rangle^2 = |(c')^\perp + tV'|^2. \end{aligned}$$

Hierbei bedeutet $\perp$ die Komponente senkrecht zu V. Im Fall $V' = 0$ ist die Determinante genau dann Null, wenn $c' = \lambda V$ mit einem $\lambda \in \mathbb{R}$. Andernfalls haben wir Folgendes.

Lemma 8.3 *Im Fall $V' \neq 0$ auf I gilt*

$$\det G = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(c', V, V') = 0 \ \text{ und } \ t = u(s) \ \text{ mit } u = -\frac{\langle c', V' \rangle}{|V'|^2}. \tag{8.5}$$

Beweis: Offenbar ist $\langle (c')^\perp + tV', V \rangle = 0$. Wir berechnen weiter

$$\begin{aligned} \langle (c')^\perp + tV', V \times V' \rangle &= \langle c', V \times V' \rangle = \det(c', V, V'), \\ \langle (c')^\perp + tV', V' \rangle &= \langle c', V' \rangle + t|V'|^2. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt. $\square$

Nullstellen von $\det G$ liegen also auf der sogenannten Striktionslinie

$$\mathcal{L}_F = \{(s,t) \in I \times \mathbb{R} : t = u(s)\} \quad \text{mit } u = -\frac{\langle c', V' \rangle}{|V'|^2}.$$

Durch Umparametrisierung kann man immer $\langle c', V' \rangle = 0$ bzw. $\mathcal{L}_F = I \times \{0\}$ erreichen. Man betrachtet einfach $\tilde{F}(s,t) = F(s, t + u(s))$, dann ist $\tilde{F}(s,t) = \tilde{c}(s) + tV(s)$ mit $\tilde{c}(s) = c(s) + u(s)V(s)$, also wie gewünscht

$$\langle \tilde{c}', V' \rangle = \langle c', V' \rangle + u\,|V'|^2 = 0.$$

Lemma 8.4 *Für eine reguläre Regelfläche $F(s,t) = c(s) + tV(s)$ ist*

$$K = -\frac{\det(c', V, V')^2}{(\det G)^2} \leq 0 \quad \text{mit } \det G = |(c')^\perp + tV'|^2.$$

Beweis: Seien G, H die Matrizen der Fundamentalformen. Wir berechnen

$$\partial_{11}^2 F = c'' + tV'', \quad \partial_{12}^2 F = V', \quad \partial_{22}^2 F = 0,$$

sowie mit dem Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$

$$N = \frac{\partial_1 F \times \partial_2 F}{|\partial_1 F \times \partial_2 F|} = \frac{c' \times V + tV' \times V}{\sqrt{\det G}}.$$

Es folgt

$$h_{12} = \frac{\det(c', V, V')}{\sqrt{\det G}} \quad \text{und} \quad h_{22} = 0.$$

Die Matrix des Weingartenoperators S ist $G^{-1}H$, somit ergibt sich

$$K = \det S = \frac{\det H}{\det G} = -\frac{\det(c', V, V')^2}{(\det G)^2}.$$

□

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nun zur Gleichung $K = 0$.

Satz 8.2 (Flächen mit $K = 0$) *Sei $F \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche mit $K \equiv 0$, und $x_0 \in U$ kein Flachpunkt. Dann kann F nahe bei x_0 als Regelfläche umparametrisiert werden.*

Wir brauchen zum Beweis die Existenz spezieller Koordinaten. Um unsere Diskussion nicht zu unterbrechen, formulieren wir nur die Aussage und führen die Konstruktion der Koordinaten im Anhang aus.

Satz 8.3 (Krümmungslinienparameter) *Sei $F \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche und $x_0 \in U$ kein Nabelpunkt, das heißt die Hauptkrümmungen in x_0 seien nicht gleich. Dann gibt es einen Diffeomorphismus $\phi : V \to \phi(V) \subset U$ mit $x_0 \in \phi(V)$, so dass für $\tilde{F} = F \circ \phi$ gilt:*

$$\tilde{g}_{12} = 0, \, \tilde{h}_{12} = 0 \quad \textit{auf } V.$$

In Koordinaten mit $g_{12} = h_{12} = 0$ lautet die Matrix des Weingartenoperators

$$S = \begin{pmatrix} \frac{h_{11}}{g_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{h_{22}}{g_{22}} \end{pmatrix}.$$

Insbesondere sind die Kordinatenrichtungen $e_{1,2}$ (nicht normierte) Hauptkrümmungsrichtungen. Kurven, deren Tangentenvektoren bis auf Normierung Hauptkrümmungsrichtungen sind, heißen Krümmungslinien. Zum Beispiel sind für eine Rotationsfläche die Koordinatenlinien Hauptkrümmungslinien.

Beweis: *(von Satz 8.2)* Nach Satz 8.3 können wir annehmen, dass F in Krümmungslinenparametern gegeben ist, also

$$g_{12} = h_{12} = 0 \quad \text{auf } U.$$

Außerdem sei nach Translation $x_0 = (0,0)$. Die Koordinatenvektoren $e_{1,2}$ sind Eigenvektoren des Weingartenoperators zu den Eigenwerten $\varkappa_{1,2}$. Da $\varkappa_1\varkappa_2 = 0$ und $x_0 = (0,0)$ nach Voraussetzung kein Flachpunkt, können wir $\varkappa_1 \neq 0$ sowie $\varkappa_2 = 0$ auf U annehmen. Zusätzlich können wir erreichen, dass

$$|\partial_1 F(s,0)| = 1 \quad \text{und} \quad |\partial_2 F(0,t)| = 1 \quad \text{auf } U.$$

Dazu ersetze $F(s,t)$ durch $\tilde{F}(s,t) = F(\alpha(s), \beta(t))$, wobei $\alpha(0) = \beta(0) = 0$ und

$$\alpha'(s) = \frac{1}{|\partial_1 F|(\alpha(s),0)} \quad \text{und} \quad \beta'(t) = \frac{1}{|\partial_2 F|(0,\beta(t))}.$$

Jetzt zeigen wir $|\partial_2 F| = 1$ und $\partial_2^2 F = 0$ auf U. Daraus folgt dann

$$F(s,t) = F(s,0) + t\partial_2 F(s,0) \quad \text{wobei } |\partial_2 F(s,0)| = 1,$$

also die gewünschte Darstellung als Regelfläche. Die Weingartengleichung liefert

$$\partial_1 N = -DF \cdot Se_1 = -\varkappa_1 \partial_1 F \neq 0 \quad \text{sowie} \quad \partial_2 N = -DF \cdot Se_2 = 0.$$

Es folgt $\langle \partial_2^2 F, N\rangle = -\langle \partial_2 F, \partial_2 N\rangle = 0$, sowie $\langle \partial_2 F, \partial_1 N\rangle = -\varkappa_1 \langle \partial_2 F, \partial_1 F\rangle = 0$ wegen $g_{12} = 0$. Wir berechnen weiter

$$\langle \partial_2^2 F, \partial_1 F\rangle = -\frac{1}{\varkappa_1}\langle \partial_2^2 F, \partial_1 N\rangle = -\frac{1}{\varkappa_1}\partial_2 \langle \partial_2 F, \partial_1 N\rangle + \frac{1}{\varkappa_1}\langle \partial_2 F, \partial_1\partial_2 N\rangle = 0,$$

$$\partial_1 |\partial_2 F|^2 = 2\langle \partial_2 F, \partial_1 \partial_2 F\rangle = 2\partial_2 \langle \partial_2 F, \partial_1 F\rangle - 2\langle \partial_2^2 F, \partial_1 F\rangle = 0.$$

Es folgt $|\partial_2 F(s,t)|^2 = |\partial_2 F(0,t)|^2 = 1$ und schließlich $\langle \partial_2^2 F, \partial_2 F\rangle = \frac{1}{2}\partial_2 |\partial_2 F|^2 = 0$. Da die Vektoren $\partial_1 F, \partial_2 F, N$ eine Basis bilden, ist $\partial_2^2 F = 0$ auf U und der Satz ist bewiesen. □

Beispiel 8.3 (Regelflächen mit $K = 0$) Sei $F(s,t) = c(s) + tV(s)$ mit $|V(s)| = 1$ eine glatte Regelfäche mit $K = 0$ auf der Menge, wo F Rang 2 hat. Es ergeben sich folgende Spezialfälle:

Fall 1: $V' = 0$ auf I
Dann ist $V(s) = V_0$ für ein $V_0 \in \mathbb{R}^3$ mit $|V_0| = 1$, und F heißt Zylinderfläche. Der Rang ist 2 genau wenn $c'(s)$ kein Vielfaches von V_0 ist.

Fall 2: $V' \neq 0$ auf I
Wie oben bemerkt, können wir $\langle c', V'\rangle = 0$ auf I annehmen. Nach Lemma 8.3 ist F dann regulär für $t \neq 0$. Wegen $K = 0$ folgt $\det(c', V, V') = 0$ auf ganz I nach Lemma 8.4, und F ist für $t = 0$ singulär. Außerdem sehen wir $c' = \langle c', V\rangle V$ auf I.

Fall 2.1: $\langle c', V\rangle = 0$ auf I
Dann ist $c(s) = p$ für ein $p \in \mathbb{R}^3$, und F heißt Kegelfläche.

Fall 2.2: $\langle c', V\rangle \neq 0$ auf I
Dann folgt $F(s,t) = c(s) + t\frac{c'(s)}{|c'(s)|}$, und F heißt Tangentenfläche.

Es ist zu beachten, dass dies keine Klassifikation liefert. Die Fälle 1 und 2, sowie 2.1 und 2.2, sind disjunkt aber nicht komplementär.

Satz 8.4 *Sei $F \in C^\infty(U,\mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche mit Gaußkrümmung $K = 0$ auf U. Dann gibt es eine offene und dichte Menge $V \subset U$, so dass für $x \in V$ gilt: es gibt eine offene Umgebung V_x, so dass $F|_{V_x}$ ein Stück einer Ebene, Zylinderfläche, Kegelfläche oder Tangentenfläche parametrisiert.*

Beweis: Wir betrachten folgende Teilmengen: sei U_1 die Menge aller $x \in U$, so dass $h = 0$ auf einer offenen Umgebung von x. Dann parametrisiert F lokal eine Ebene bei x. Mit $U_2 = \{x \in U : h(x) \neq 0\}$ gilt $U = U_1 \cup \overline{U_2}$, also ist $U_1 \cup U_2$ offen und dicht. Für $x \in U_2$ existiert lokal eine Umparametrisierung als Stück einer Regelfläche

$$F : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ F(s,t) = c(s) + tV(s).$$

Sei I_1 die Menge der $s \in I$ mit $V' = 0$ auf einer offenen Umgebung von s. Dann ist F auf $I_1 \times \mathbb{R}$ lokal eine Zylinderfläche. Mit $I_2 = \{s \in I : V'(s) \neq 0\}$ ist wieder $I_1 \cup I_2$ offen und dicht in I. Für $s \in I_2$ können wir nach Umparametrisierung annehmen, das lokal $\langle c', V'\rangle = 0$ ist. Sei J_1 die Menge aller $s \in I_2$ mit $\langle c', V\rangle = 0$ nahe bei s. Dann ist F auf $J_1 \times \mathbb{R}$ lokal eine Kegelfläche. Mit $J_2 = \{s \in I_2 : \langle c'(s), V\rangle \neq 0\}$ ist $J_1 \cup J_2$ offen und dicht in I_2, und für $s \in J_2$ ist F lokal eine Tangentenfläche. Insgesamt hat die Fläche auf einer offenen und dichten Teilmenge, lokal nach Umparametrisierung, den behaupteten Typ. □

Eine Fläche mit $K = 0$ kann aus offenen Stücken von Ebenen, Zylinderflächen, Kegelflächen und Tangentenflächen zusammengesetzt sein. Insbesondere ist sie nicht schon durch ein kleines Stück eindeutig bestimmt. Enthält dagegen eine Minimalfläche zum Beispiel ein offenes Stück einer Ebene, so ist sie insgesamt eben. Als Grund für diese eindeutige Fortsetzbarkeit kann die Tatsache angesehen werden, dass die partielle Differentialgleichung $H = 0$ elliptisch ist, während die Gleichung $K = 0$ degeneriert ist. Das sehen wir schon bei Linearisierung der Gleichung für Graphen, um die Lösung $u_0 = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} H[u_0 + t\varphi]|_{t=0} &= \Delta\varphi, \\ \frac{\partial}{\partial t} K[u_0 + t\varphi]|_{t=0} &= 0. \end{aligned}$$

Bemerkung 8.3 Eine längentreue Deformation einer Fläche bezeichnet man auch als Verbiegung. Wie wir bald zeigen werden, bleibt die Gaußsche Krümmung K unter Verbiegungen invariant, siehe Folgerung 9.3. Zum Beispiel liefert die Verbiegung eines Blatts Papier oder einer dünnen elastischen Platte lokal eine Regelfläche mit $K = 0$, außerhalb von Flachpunkten. Unter dieser Nebenbedingung wird eine geeignete Krümmungsenergie minimiert.

Als Anhang tragen wir nun die Konstruktion der Krümmungslinienparameter nach. Dazu benötigen wir aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen den Begriff des Flusses eines Vektorfelds.

Satz 8.5 *Sei $X \in C^\infty(U,\mathbb{R}^2)$ mit $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $0 \in U$. Dann gibt es eine offene Umgebung $V \subset U$ des Nullpunkts und eine glatte Abbildung φ :*

$V \times (-\delta, \delta) \to U$ *mit*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t) &= X\big(\varphi(x,t)\big) \quad \text{für alle } (x,t) \in V \times (-\delta, \delta), \\ \varphi(x,0) &= 0 \quad \text{für alle } x \in V. \end{aligned}$$

Für festes $x \in U$ existiert $\varphi(x, \cdot)$ als Lösung des Anfangswertproblems nach Picard–Lindelöf auf einem maximalen Intervall I_x und ist eindeutig bestimmt. Der Satz besagt, dass eine Umgebung V existiert, so dass alle I_x ein festes Intervall $(-\delta, \delta)$ enthalten. Zweitens hängt die Lösung $\varphi(x,t)$ glatt vom Anfangswert $x \in V$ ab.

Der Kommutator von Vektorfeldern $X, Y \in C^\infty(U, \mathbb{R}^2)$ ist das Vektorfeld $[X,Y] \in C^\infty(U, \mathbb{R}^2)$ definiert durch

$$[X,Y](x) = DY(x) \cdot X(x) - DX(x) \cdot Y(x) \quad \text{für } x \in U,$$

beziehungsweise in Koordinaten

$$[X,Y] = \sum_{i,j=1}^{2} \Big(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \Big) e_j.$$

Die Bezeichnung erklärt sich so: für $f \in C^\infty(U)$ ergibt die Symmetrie von $D^2 f$

$$\big(\partial_X \partial_Y - \partial_Y \partial_X\big) f = \sum_{i,j=1}^{2} \Big(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \Big) \frac{\partial f}{\partial x^j}.$$

Also gilt die Formel

$$\big(\partial_X \partial_Y - \partial_Y \partial_X\big) f = \partial_{[X,Y]} f. \tag{8.6}$$

Satz 8.6 *Seien* $X, Y \in C^\infty(U, \mathbb{R}^2)$, *wobei* $U \subset \mathbb{R}^2$ *offen mit* $0 \in U$. *Ist* $[X,Y] = 0$ *auf* U *und sind* $X(0), Y(0)$ *linear unabhängig, so existiert ein Diffeomorphismus* $f : (-\varepsilon, \varepsilon)^2 \to W \subset U$ *mit* $0 \in W$, *so dass gilt:*

$$\frac{\partial f}{\partial s} = X \circ f \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial t} = Y \circ f.$$

Beweis: Seien $\varphi, \psi : V \times (-\delta, \delta) \to U$ die Flüsse der Vektorfelder X bzw. Y. Für s, t fest schreiben wir $\varphi_s, \psi_t : V \to U$, $\varphi_s(x) = \varphi(x,s)$ sowie $\psi_t(x) = \psi(x,t)$. Für $V \subset U$ und $\varepsilon > 0$ geeignet haben wir dann die glatte Abbildung

$$f : (-\varepsilon, \varepsilon)^2 \to U,\ f(s,t) = \psi_t(\varphi_s(0)) = \psi(\varphi(s,0), t).$$

Aus der Definition folgt

$$f(s,0) = \varphi(0,s), \quad \frac{\partial f}{\partial s}(s,0) = X(f(s,0)), \quad \frac{\partial f}{\partial t}(s,t) = Y\big(f(s,t)\big).$$

Für die s-Ableitung berechnen wir

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} Y \circ f = (DY) \circ f \cdot \frac{\partial f}{\partial s}.$$

Andererseits folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} X \circ f = (DX) \circ f \cdot \frac{\partial f}{\partial t} = (DX \cdot Y) \circ f.$$

Damit erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial f}{\partial s} - X \circ f\Big) = (DY) \circ f \cdot \Big(\frac{\partial f}{\partial s} - X \circ f\Big) + [X, Y] \circ f.$$

Aber $\partial_s f = X \circ f$ an der Stelle $(s, 0)$. Da $[X, Y] = 0$ nach Voraussetzung, ergibt sich die fehlende erste Gleichung aus der Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems. Ebenfalls nach Voraussetzung ist $Df(0, 0)$ invertierbar, und somit Diffeomorphismus auf $W = f\big((-\varepsilon, \varepsilon)^2\big)$ für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein. $\square$

Lemma 8.5 *Seien $X, Y \in C^\infty(U, \mathbb{R}^2)$, wobei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $0 \in U$, und $X(0)$, $Y(0)$ linear unabhängig. Nach Verkleinerung von U gibt es $\lambda, \mu \in C^\infty(U)$ mit $\lambda, \mu > 0$, so dass*

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}] = 0 \ \ \textit{auf}\ U \qquad \textit{für}\ \tilde{X} = \lambda X,\ \tilde{Y} = \mu Y.$$

Beweis: Ohne Einschränkung sind X, Y linear unabhängig sind in allen $x \in U$. Es gilt dann

$$[X, Y] = aX + bY \qquad \text{mit } a, b \in C^\infty(U).$$

Mit dem Ansatz $\tilde{X} = \lambda X$, $\tilde{Y} = \mu Y$ berechnen wir

$$\begin{aligned} D\tilde{Y} \cdot \tilde{X} - D\tilde{X} \cdot \tilde{Y} &= \lambda D(\mu Y) \cdot X - \mu D(\lambda X) \cdot Y \\ &= \lambda\mu(DY \cdot X - DX \cdot Y) + \lambda(D\mu \cdot X)Y - \mu(D\lambda \cdot Y)X \\ &= \big(\lambda a - D\lambda \cdot Y\big)\mu X + \big(\mu b + D\mu \cdot X\big)\lambda Y. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt, wenn wir $\lambda, \mu > 0$ finden mit

$$D \log \lambda \cdot Y = a \qquad \text{und} \qquad D \log \mu \cdot X = -b.$$

Wir lösen die erste Gleichung, die zweite ist entsprechend. Sei $f(s, t) = \psi_t(\varphi(s, 0))$ wie oben definiert bezüglich X, Y. Dann gilt für $u = \log \lambda \circ f$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (D \log \lambda) \circ f \cdot \frac{\partial f}{\partial t} = (D \log \lambda) \circ f \cdot Y \circ f = (D \log \lambda \cdot Y) \circ f.$$

Wähle nun $u(s, t) = \int_0^t a(f(s, \tau))\, d\tau$. Dann erfüllt die Funktion $\lambda = (\exp u) \circ f^{-1} > 0$ die gewünschte Gleichung. $\square$

Beweis: *(von Satz 8.3)* Da der Nullpunkt nach Voraussetzung kein Nabelpunkt ist, gibt es auf einer Umgebung glatte Vektorfelder X, Y mit folgenden Eigenschaften:

- $X(x), Y(x)$ sind Eigenvektoren des Weingartenoperators zu $\varkappa_1(x) > \varkappa_2(x)$;
- $X(x)$, $Y(x)$ sind normiert mit $\|X\|_g = \|Y\|_g = 1$ auf U.

Genauer können diese Vektorfelder explizit aus g und h mit linearer Algebra berechnet werden. Nach Lemma 8.5 können wir zu $\tilde{X} = \lambda X$ und $\tilde{Y} = \mu Y$ übergehen, so dass $[\tilde{X}, \tilde{Y}] = 0$ und $\tilde{X}, \tilde{Y}$ linear unabhängig auf U, nach Verkleinerung von U. Nun liefert Satz 8.6 die gesuchte Parametrisierung nach Krümmungslinien. $\square$

9 Hauptsatz der Flächentheorie

Der Hauptsatz für ebene Kurven besagt, dass es zu jeder gegebenen Funktion $k : I \to \mathbb{R}$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte, ebene Kurve mit Krümmung $\varkappa = k$ gibt, und dass diese Kurve eindeutig bestimmt ist bis auf Euklidische Bewegungen, siehe Übungsaufgabe 3.3. Es gibt auch einen entsprechenden Satz für Raumkurven, bei dem dann zusätzlich die Torsion als Invariante auftritt, siehe Übungsaufgabe 10. Wir wollen jetzt eine entsprechende Aussage für Flächen diskutieren; dies wird wesentlich komplexer, weil statt gewöhnlicher nun partielle Differentialgleichungen zu untersuchen sind.

Auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ seien Funktionen $(a_{ij}) \in C^{k-1}(U, \mathbb{R}^{2\times 2})$ und $(b_{ij}) \in C^{k-2}(U, \mathbb{R}^{2\times 2})$ gegeben, so dass gilt:

- (a_{ij}) ist symmetrisch und strikt positiv definit auf U,
- (b_{ij}) ist symmetrisch auf U.

Wir stellen folgende Fragen:

- Gibt es eine reguläre C^k-Fläche $F : U \to \mathbb{R}^3$ mit den Fundamentalformen $g_{ij} = a_{ij}$ und $h_{ij} = b_{ij}$?
- Wenn ja, ist diese Fläche bis auf eigentliche Bewegungen eindeutig bestimmt?

Die gesuchte Fläche ist durch die drei Funktionen F^i gegeben, während die Relationen $g_{ij} = a_{ij}$ und $h_{ij} = b_{ij}$ mit Berücksichtigung der Symmetrie der Matrizen sechs Gleichungen liefern. Damit ist der Verdacht naheliegend, dass das Problem nicht allgemein lösbar ist. Wir werden für g_{ij} und h_{ij} zusätzliche *versteckte* Relationen herleiten, nämlich die Gleichungen von Gauß und Codazzi-Mainardi. Diese Relationen stellen Integrabilitätsbedingungen dar, die von a_{ij} und b_{ij} erfüllt werden müssen. Wir werden schließlich zeigen, dass diese Bedingungen auch hinreichend für die Existenz einer Lösung sind.

Für eine reguläre Fläche $F : U \to \mathbb{R}^3$ mit Normale N verwenden wir im folgenden die Notation

$$X^\top = X - \langle X, N\rangle N \quad \text{für } X : U \to \mathbb{R}^3.$$

Definition 9.1 (kovariante Ableitung) *Sei $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre C^2-Fläche. Für $\xi, \eta \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$ bezeichne $\nabla_\xi \eta : U \to \mathbb{R}^2$ das eindeutig bestimmte Vektorfeld mit*

$$(D_\xi(D_\eta F))^\top = DF \cdot \nabla_\xi \eta.$$

Ausdifferenzieren des Terms $D_\xi(D_\eta F)$ ergibt

$$\begin{aligned} D_\xi(D_\eta F) &= \sum_{i,j=1}^2 \xi^i \partial_i(\eta^j \partial_j F) \\ &= \sum_{i,j=1}^2 \xi^i \eta^j \partial^2_{ij} F + \sum_{i,j=1}^2 \xi^i (\partial_i \eta^j) \partial_j F \\ &= D^2 F(\xi, \eta) + DF \cdot D_\xi \eta. \end{aligned}$$

Insbesondere folgt $D_\xi(D_\eta F)^\perp = D^2F(\xi,\eta)^\perp = h(\xi,\eta)N$, also gilt die Darstellung

$$D_\xi(D_\eta F) = DF \cdot \nabla_\xi \eta + h(\xi,\eta)N. \tag{9.1}$$

Für $\nabla_\xi \eta$ gelten folgende Differentiationsregeln.

Satz 9.1 (Eigenschaften von ∇) *Für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und C^1-Vektorfelder ξ, η erfüllt $\nabla_\xi \eta$ folgende Rechenregeln:*

(1) $\nabla_{\lambda\xi_1+\mu\xi_2}\eta = \lambda\nabla_{\xi_1}\eta + \mu\nabla_{\xi_2}\eta$ *und* $\nabla_\xi(\lambda\eta_1 + \mu\eta_2) = \lambda\nabla_\xi\eta_1 + \mu\nabla_\xi\eta_2$ *(Linearität).*

(2) $\nabla_{\varphi\xi}\eta = \varphi\nabla_\xi\eta$ *für* $\varphi \in C^1(U)$ *(Linearität bzgl. Funktionen in ξ).*

(3) $\nabla_\xi(\varphi\eta) = \varphi\nabla_\xi\eta + (D_\xi\varphi)\eta$ *(Produktregel in η).*

(4) $\nabla_{e_1}e_2 = \nabla_{e_2}e_1$ *(Symmetrie).*

(5) $D_\xi\big(g(\eta_1,\eta_2)\big) = g(\nabla_\xi\eta_1,\eta_2) + g(\eta_1,\nabla_\xi\eta_2)$ *(Produktregel bzgl. g).*

Beweis: Die Eigenschaften (1),(2),(3) und (4) folgen aus den entsprechenden Eigenschaften der Ableitung D mit Definition 9.1. Wir zeigen exemplarisch die erste Aussage in (1):

$$DF\cdot\nabla_{\lambda\xi_1+\mu\xi_2}\eta = (D_{\lambda\xi_1+\mu\xi_2}(D_\eta F))^\top = \lambda(D_{\xi_1}(D_\eta F))^\top + \mu(D_{\xi_2}(D_\eta F))^\top = DF\cdot\big(\lambda\nabla_{\xi_1}\eta + \mu\nabla_{\xi_2}\eta\big).$$

Schließlich ergibt sich (5) aus

$$\begin{aligned}
D_\xi(g(\eta_1,\eta_2)) &= D_\xi\langle D_{\eta_1}F, D_{\eta_2}F\rangle \\
&= \langle D_\xi(D_{\eta_1}F), D_{\eta_2}F\rangle + \langle D_{\eta_1}F, D_\xi(D_{\eta_2}F)\rangle \\
&= \langle DF\cdot\nabla_\xi\eta_1, DF\cdot\eta_2\rangle + \langle DF\cdot\eta_1, DF\cdot\nabla_\xi\eta_2\rangle \\
&= g(\nabla_\xi\eta_1,\eta_2) + g(\eta_1,\nabla_\xi\eta_2).
\end{aligned}$$

□

Die Aussage zur Symmetrie von ∇ in Satz 9.1(4) muss für beliebige Vektorfelder $\xi, \eta : U \to \mathbb{R}^2$ geeignet modifiziert werden.

Folgerung 9.1 (Symmetrie der kovarianten Ableitung) *Ist $F : U \to \mathbb{R}^3$ reguläre C^2-Fläche, so gilt für Vektorfelder $\xi, \eta \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$*

$$\nabla_\xi\eta - \nabla_\eta\xi = [\xi,\eta].$$

Dabei ist $[\xi,\eta] = D_\xi\eta - D_\eta\xi = \sum_{i,j=1}^2(\xi^i\partial_i\eta^j - \eta^i\partial_i\xi^j)e_j$ der Kommutator.

Beweis: Durch Entwicklung in die Standardbasis und Verwendung von (1),(2),(3) und (4) aus Satz 9.1:

$$\begin{aligned}
\nabla_\xi\eta - \nabla_\eta\xi &= \sum_{i,j=1}^2\big(\xi^i\nabla_{e_i}(\eta^j e_j) - \eta^i\nabla_{e_i}(\xi^j e_j)\big) \\
&= \sum_{i,j=1}^2(\xi^i\partial_i\eta^j - \eta^i\partial_i\xi^j)e_j + \sum_{i,j=1}^2\underbrace{(\xi^i\eta^j - \xi^j\eta^i)}_{\text{schief}}\,\underbrace{\nabla_{e_i}e_j}_{\text{gerade}} \\
&= [\xi,\eta].
\end{aligned}$$

□

Definition 9.2 (Christoffelsymbole) *Sei $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine C^2-Fläche mit kovarianter Ableitung ∇. Die eindeutig bestimmten Funktionen $\Gamma_{ij}^k : U \to \mathbb{R}$ mit*

$$\nabla_{e_i} e_j = \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^k e_k$$

heißen Christoffelsymbole von F.

Lemma 9.1 *Für eine reguläre Fläche $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ gilt:*

(1) $\Gamma_{12}^k = \Gamma_{21}^k$ *für* $k = 1, 2$.

(2) $\nabla_\xi \eta = D_\xi \eta + \Gamma(\xi, \eta)$ *mit* $\Gamma(\xi, \eta) = \sum_{i,j,k=1}^2 \Gamma_{ij}^k \xi^i \eta^j e_k$.

Beweis: Behauptung (1) folgt direkt aus der Symmetrie, Satz 9.1(4):

$$\sum_{k=1}^{2} \Gamma_{12}^k e_k = \nabla_{e_1} e_2 = \nabla_{e_2} e_1 = \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{21}^k e_k.$$

Die zweite Aussage ergibt sich durch Entwicklung in die Standardbasis:

$$\nabla_\xi \eta = \sum_{i,j=1}^{2} \xi^i \nabla_{e_i}(\eta^j e_j) = \sum_{i,j=1}^{2} \xi^i (\partial_i \eta^j) e_j + \sum_{i,j=1}^{2} \xi^i \eta^j \nabla_{e_i} e_j = D_\xi \eta + \sum_{i,j,k=1}^{2} \xi^i \eta^j \Gamma_{ij}^k e_k.$$

□

Satz 9.2 (Levi-Civita) *Sei $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre C^2-Fläche. Dann ist die kovariante Ableitung durch die erste Fundamentalform bestimmt. Genauer gilt für die Christoffelsymbole*

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{2} g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}). \tag{9.2}$$

Dabei ist (g^{ij}) die inverse Matrix zu (g_{ij}).

Beweis: Mit der Produktregel Satz 9.1(5) folgt

$$\begin{aligned}
\partial_i g_{jl} &= \underbrace{g(\nabla_{e_i} e_j, e_l)}_{I} + \underbrace{g(\nabla_{e_i} e_l, e_j)}_{II} \\
\partial_j g_{il} &= \underbrace{g(\nabla_{e_j} e_i, e_l)}_{I} + \underbrace{g(\nabla_{e_j} e_l, e_i)}_{III} \\
\partial_l g_{ij} &= \underbrace{g(\nabla_{e_l} e_i, e_j)}_{II} + \underbrace{g(\nabla_{e_l} e_j, e_i)}_{III}.
\end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie, Satz 9.1(4), stehen rechts nur die drei Funktionen I, II, III, das heißt wir haben ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ II \\ III \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_i g_{jl} \\ \partial_j g_{il} \\ \partial_l g_{ij} \end{pmatrix}.$$

Da die Koeffizientenmatrix invertierbar ist, können wir $g(\nabla_{e_i} e_j, e_l)$ als Linearkombination der Funktionen $\partial_i g_{jl}, \partial_j g_{il}, \partial_l g_{ij}$ darstellen; daraus folgt schon die erste Behauptung des Satzes. Explizit ergibt sich durch Addition der ersten beiden Zeilen und Subtraktion der dritten Zeile

$$g(\nabla_{e_i} e_j, e_l) = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}),$$

beziehungsweise mit der Definition der Christoffelsymbole

$$\sum_{m=1}^{2} g_{lm} \Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}).$$

Multiplikation mit g^{kl} und Summation über l liefert

$$\frac{1}{2} \sum_{l=1}^{2} g^{kl}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}) = \sum_{m=1}^{2} \sum_{l=1}^{2} g^{kl} g_{lm} \Gamma_{ij}^m = \Gamma_{ij}^k.$$

□

Wir bemerken, dass es aus der Definition der kovarianten Ableitung über den Tangentialanteil der zweiten Ableitung keineswegs offensichtlich ist, dass dieses Objekt nur von der ersten Fundamentalform abhängt, also beispielsweise unter längentreuen Verbiegungen invariant ist.

Satz 9.3 (Ableitungsgleichungen der Flächentheorie) *Für eine reguläre Fläche $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ gelten die Gleichungen*

$$\begin{aligned} \partial_i \partial_j F &= \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^k \partial_k F + h_{ij} N \\ \partial_i N &= -\sum_{j,k=1}^{2} h_{ij} g^{jk} \partial_k F. \end{aligned}$$

Dabei sind N die Normale, g und h die erste bzw. zweite Fundamentalform, und Γ_{ij}^k die Christoffelsymbole von F.

Beweis: Mit (9.1) und Definition 9.2 folgt

$$\partial_i \partial_j F = DF \cdot \nabla_{e_i} e_j + h_{ij} N = \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^k \partial_k F + h_{ij} N.$$

Zweitens gilt nach Satz 7.1, mit $S_i^k = \sum_{j=1}^2 g^{kj} h_{ji} = \sum_{j=1}^2 h_{ij} g^{jk}$,

$$\partial_i N = -DF \cdot S e_i = -DF \cdot \sum_{j,k=1}^{2} h_{ij} g^{jk} e_k = -\sum_{j,k=1}^{2} h_{ij} g^{jk} \partial_k F.$$

□

Die Ableitungsgleichungen können als System linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung für die drei vektorwertigen Funktionen $V_1 = \partial_1 F$, $V_2 = \partial_2 F$ und $V_3 = N$ aufgefasst werden. Genauer gilt

$$\partial_\alpha V_j = \sum_{i=1}^{3} A^i_{\alpha j} V_i \quad \text{für } \alpha = 1,2 \text{ und } j = 1,2,3, \tag{9.3}$$

wobei die Koeffizienten wie folgt gegeben sind (hier $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2$):

$$\begin{array}{cccc} A^\gamma_{\alpha\beta} & A^3_{\alpha\beta} & A^\gamma_{\alpha 3} & A^3_{\alpha 3} \\ \\ \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} & h_{\alpha\beta} & -\sum_{\beta=1}^2 h_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} & 0 \end{array} \tag{9.4}$$

Für $F \in C^3(U, \mathbb{R}^3)$ erhalten wir nun Integrabilitätsbedingungen durch das Vertauschen von Ableitungen. Und zwar liefert Differentiation von (9.3) nach e_β

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \partial_\beta V_k &= \partial_\alpha \sum_{j=1}^{3} A^j_{\beta k} V_j \\ &= \sum_{j=1}^{3} (\partial_\alpha A^j_{\beta k}) V_j + \sum_{j=1}^{3} A^j_{\beta k} (\partial_\alpha V_j) \\ &= \sum_{j=1}^{3} (\partial_\alpha A^j_{\beta k}) V_j + \sum_{i,j=1}^{3} A^j_{\beta k} A^i_{\alpha j} V_i \\ &= \sum_{i=1}^{3} \left(\partial_\alpha A^i_{\beta k} + \sum_{j=1}^{3} A^i_{\alpha j} A^j_{\beta k} \right) V_i. \end{aligned}$$

Vertauschen von α, β ergibt, da V_1, V_2, V_3 eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist,

$$\partial_\alpha A^i_{\beta k} - \partial_\beta A^i_{\alpha k} + \sum_{j=1}^{3} (A^i_{\alpha j} A^j_{\beta k} - A^i_{\beta j} A^j_{\alpha k}) = 0. \tag{9.5}$$

Satz 9.4 (Gauß und Codazzi-Mainardi) *Sei $F \in C^3(U, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche. Dann erfüllen die beiden Fundamentalformen g_{ij} und h_{ij} die Gleichungen*

$$\partial_\alpha \Gamma^\lambda_{\beta\gamma} - \partial_\beta \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma} + \sum_{\mu=1}^{2} (\Gamma^\lambda_{\alpha\mu} \Gamma^\mu_{\beta\gamma} - \Gamma^\lambda_{\beta\mu} \Gamma^\mu_{\alpha\gamma}) = \sum_{\mu=1}^{2} (h_{\alpha\mu} h_{\beta\gamma} - h_{\alpha\gamma} h_{\beta\mu}) g^{\mu\lambda} \tag{9.6}$$

$$\partial_\alpha h_{\beta\gamma} - \partial_\beta h_{\alpha\gamma} + \sum_{\lambda=1}^{2} (h_{\alpha\lambda} \Gamma^\lambda_{\beta\gamma} - h_{\beta\lambda} \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma}) = 0. \tag{9.7}$$

Beweis: Die Gaußgleichung ist (9.5) für $i = \lambda$, $k = \gamma$ mit $1 \leq \lambda, \gamma \leq 2$, wobei (9.4) eingesetzt wird und auf der rechten Seite die Terme mit $j = 3$ stehen. Die Gleichungen von Codazzi-Mainardi ergeben sich aus (9.5) für $i = 3$ und $k = \gamma = 1, 2$ entsprechend. Man kann sich davon überzeugen, dass sich der Fall $k = 3$ und $i = 1, 2$ ebenfalls auf die Gleichungen von Codazzi-Mainardi reduziert; der Fall $i = k = 3$ liefert trivialerweise keine Information. □

Beispiel 9.1 (Gaußkrümmung in konformer Parametrisierung) Wir berechnen die Gaußgleichungen für eine konform parametrisierte Fläche $F \in C^3(U, \mathbb{R}^3)$, das heißt die erste Fundamentalform ist

$$g_{\alpha\beta} = e^{2u}\delta_{\alpha\beta} \quad \text{mit } u : U \to \mathbb{R}.$$

Offensichtlich ist $2u = \log \frac{1}{2}(g_{11} + g_{22}) = \log \frac{1}{2}|DF|^2 \in C^2(U)$. Die rechte Seite RS der Gaußgleichung (9.6) lautet

$$RS_{\alpha\beta\gamma\lambda} = e^{-2u}\,(h_{\alpha\lambda}h_{\beta\gamma} - h_{\alpha\gamma}h_{\beta\lambda}).$$

Sie ist schiefsymmetrisch bezüglich α, β und γ, λ, und damit schon durch den Wert für $(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) = (1, 2, 2, 1)$ bestimmt. Dieser ist explizit

$$RS_{1221} = e^{-2u}(h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}) = e^{2u}K.$$

Für die linke Seite berechnen wir erst mit (9.2)

$$\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} = \partial_\alpha u\,\delta_{\beta\lambda} + \partial_\beta u\,\delta_{\alpha\lambda} - \partial_\lambda u\,\delta_{\alpha\beta}. \tag{9.8}$$

Das wird etwas übersichtlicher in der kleinen Tabelle

$$\begin{array}{cccccc} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} & \Gamma^1_{22} & \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} & \Gamma^2_{22} \\ \partial_1 u & \partial_2 u & -\partial_1 u & -\partial_2 u & \partial_1 u & \partial_2 u. \end{array} \tag{9.9}$$

Für $(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) = (1, 2, 2, 1)$ ergibt sich für die linke Seite von (9.6)

$$\begin{aligned} LS_{1221} &= \partial_1\Gamma^1_{22} - \partial_2\Gamma^1_{12} + \sum_{\mu=1}^{2}(\Gamma^1_{1\mu}\Gamma^\mu_{22} - \Gamma^1_{2\mu}\Gamma^\mu_{12}) \\ &= \partial_1(-\partial_1 u) - \partial_2(\partial_2 u) + \partial_1 u(-\partial_1 u) - \partial_2 u\partial_2 u + \partial_2 u\partial_2 u - (-\partial_1 u)\partial_1 u \\ &= -\Delta u. \end{aligned}$$

Mit $LS_{1221} = R_{1221}$ folgt die Gleichung von Liouville (1853)

$$-\Delta u = Ke^{2u}. \tag{9.10}$$

Tatsächlich folgt aus der Liouville-Gleichung umgekehrt die volle Gaußgleichung. Dies liegt an den Symmetrien, genauer ist auch die linke Seite von (9.6) schiefsymmetrisch sowohl in α, β (was klar ist) als auch in (γ, λ).

Folgerung 9.2 *Ist eine Fläche $F \in C^3(U, \mathbb{R}^3)$ lokal längentreu parametrisierbar, so ist ihre Gaußsche Krümmung identisch Null.*

Beweis: Eine längentreue Parametrisierung ist konform mit $u \equiv 0$, also $K = -e^{-2u}\Delta u = 0$ nach Beispiel 9.1. $\square$

In den Jahren 1821 bis 1825 hat Gauß eine Vermessung des Königreichs Hannover mit Dreieckspunkten erstellt. Parallel zu dieser Triangulation hat er sich mit der Differentialgeometrie von Flächen beschäftigt, und seine Theorie 1828 im Buch *Disquisitiones Generales circa Superficies Curvas* publiziert. Auf Seite 24 unten erhält er folgenden *bemerkenswerten* Satz, der Folgerung 9.2 als Spezialfall enthält.

Folgerung 9.3 (Theorema egregium) *Ist $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre C^3-Fläche, so gilt für die Gaußsche Krümmung die Formel*

$$K = \frac{\sum_{\lambda=1}^{2} g_{\lambda 1}\Big(\partial_1 \Gamma_{22}^{\lambda} - \partial_2 \Gamma_{12}^{\lambda} + \sum_{\mu=1}^{2}(\Gamma_{1\mu}^{\lambda}\Gamma_{22}^{\mu} - \Gamma_{2\mu}^{\lambda}\Gamma_{12}^{\mu})\Big)}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Insbesondere kann $K = \varkappa_1 \varkappa_2$ aus der ersten Fundamentalform berechnet werden.

Beweis: Wähle in den Gaußgleichungen (9.6) $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 2$, multipliziere mit $g_{\lambda 1}$ und summiere über $\lambda = 1, 2$. □

Tatsächlich ist das Theorema egregium äquivalent zu den vollen Gaußgleichungen (9.6). Dies liegt daran, dass diese Gleichungen Symmetrien unter Vertauschungen der Indizes besitzen, was wir aber jetzt nicht vertiefen. Das Theorema egregium von Gauß war richtungsweisend für die Entwicklung der Differentialgeometrie im 19. Jahrhundert. Zuerst wurde dieser Satz so verstanden, dass die Gaußsche Krümmung einer Fläche eben invariant ist unter längentreuen Verbiegungen. Für Riemann war das Ergebnis, in Verbindung mit der Entdeckung der hyperbolischen Geometrie durch Bolyai und Lobatschewski, aber Motivation, eine sogenannte innere Geometrie zu entwickeln, bei der die Flächen beziehungsweise Mannigfaltigkeiten abstrakt gegeben und nicht in einen Euklidischen Raum eingebettet sind. Das Theorema egregium besagt, das in solchen Riemannschen Mannigfaltigkeiten ein Krümmungsbegriff allein aus der Längenmessung heraus definiert werden kann. Riemann hat diese Ideen in seinem Habilitationsvortrag *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen* dargelegt (Göttingen 1854), bei dem übrigens Gauß noch zugegen und angeblich sehr bewegt war. Die Riemannsche Geometrie ist die mathematische Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie (Einstein 1916).

Wir zeigen schließlich, dass die Gleichungen von Gauß und Codazzi-Mainardi auch hinreichend für die lokale Existenz einer Fläche sind, insbesondere gibt es keine weiteren versteckten Relationen.

Satz 9.5 (Hauptsatz der Flächentheorie, Bonnet 1867) *Gegeben seien $g, h : U \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $U = (-1,1)^2$, mit g, h symmetrisch und g positiv definit. Es sei $g \in C^{k-1}$ und $h \in C^{k-2}$ für ein $k \in \mathbb{N}^{\geq 3} \cup \{\infty\}$. Es gelte:*

> *g, h erfüllen die Gleichungen (9.6), (9.7) von Gauß und Codazzi-Mainardi, mit $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ definiert durch die Formel (9.2) von Levi-Civita.*

Dann gibt es eine reguläre Fläche $F \in C^k(U, \mathbb{R}^3)$, die g und h als erste bzw. zweite Fundamentalform hat. Diese Fläche ist bis auf Euklidische Bewegungen eindeutig bestimmt.

Bemerkung. Durch Fortsetzung der Lösung längs Wegen kann gezeigt werden, dass der Satz für jedes einfach zusammenhängende Gebiet $U \subset \mathbb{R}^2$ gilt.

Beweis: Vorab wählen wir zur Normierung Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} g_{ij}(0,0) & \text{für } 1 \leq i,j \leq 2, \\ 0 & \text{für } 1 \leq i \leq 2, j = 3, \\ 1 & \text{für } i = j = 3. \end{cases} \tag{9.11}$$

Sind w_1, w_2, w_3 mit $\langle w_i, w_j\rangle = \langle v_i, v_j\rangle$, so gilt $w_j = Tv_j$ mit $T \in \mathbb{O}(3)$.

Ausgangspunkt des Beweises ist nun die Tatsache, dass die Ableitungsgleichungen der Flächentheorie in der Formulierung (9.3), also

$$\partial_\alpha V_j = \sum_{i=1}^{3} A^i_{\alpha j} V_i \quad \text{mit } A^i_{\alpha j} \text{ aus (9.4)},$$

längs der x^α-Parameterlinien als lineares, homogenes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung für die Funktionen $V_1 = \partial_1 F, V_2 = \partial_2 F$ und $V_3 = N$ aufgefasst werden können. Nach (9.2) hängen die Koeffizienten dieses Systems nur von g und h ab. Ist daher $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ eine Fläche mit erster und zweiter Fundamentalform g bzw. h, so folgt durch Anwendung der Eindeutigkeit für das Anfangswertproblem – erst mit $\alpha = 1$ längs $x^1 \mapsto (x^1, 0)$, dann mit $\alpha = 2$ längs $x^2 \mapsto (x^1, x^2)$ – dass die Funktionen $\partial_1 F, \partial_2 F, N$ durch ihre Werte im Nullpunkt bestimmt sind. Da wir nach einer orthogonalen Abbildung $\partial_1 F(0,0) = v_1, \partial_2 F(0,0) = v_2$ und $N(0,0) = v_3$ annehmen können, und außerdem durch Translation $F(0,0) = 0 \in \mathbb{R}^3$ erreichen, ist F bis auf eine Euklidische Bewegung eindeutig bestimmt. Nun zum Beweis der Existenz.

Schritt 1: *Konstruktion von $V_1, V_2, V_3 \in C^{k-1}(U, \mathbb{R}^3)$ mit (9.3)*
Wir erhalten erst $V_j(x^1, 0)$ als Lösung des Anfangswertproblems

$$\partial_1 V_j(x^1, 0) = \sum_{i=1}^{3} A^i_{1j}(x^1, 0) V_i(x^1, 0) \quad \text{für } 1 \leq j \leq 3, \quad V_j(0,0) = v_j,$$

und dann $V_j(x^1, x^2)$ als Lösung des Anfangswertproblems

$$\partial_2 V_j(x^1, x^2) = \sum_{i=1}^{3} A^i_{2j}(x^1, x^2) V_i(x^1, x^2) \quad \text{für } 1 \leq j \leq 3, \quad V_j(x^1, 0) = \text{ aus Schritt 1.}$$

Dann gilt (9.3) für $\alpha = 2$ auf ganz U per Definition. Um (9.3) für $\alpha = 1$ zu zeigen, setzen wir $W_j = \partial_1 V_j - \sum_{i=1}^3 A^i_{1j} V_i$ und berechnen mit den Integrabilitätsbedingungen (9.5)

$$\begin{aligned}
\partial_2 W_j &= \partial_1 \partial_2 V_j - \sum_{i=1}^{3} (\partial_2 A^i_{1j}) V_i - \sum_{i=1}^{3} A^i_{1j} \partial_2 V_i \\
&= \sum_{i=1}^{3} (\partial_1 A^i_{2j} - \partial_2 A^i_{1j}) V_i + \sum_{i=1}^{3} A^i_{2j} \partial_1 V_i - \sum_{i,k=1}^{3} A^i_{1j} A^k_{2i} V_k \\
&= -\sum_{i,k=1}^{3} (A^i_{1k} A^k_{2j} - A^i_{2k} A^k_{1j}) V_i + \sum_{i=1}^{3} A^i_{2j} \partial_1 V_i - \sum_{i,k=1}^{3} A^i_{1j} A^k_{2i} V_k \\
&= \sum_{i=1}^{3} A^i_{2j} (\partial_1 V_i - \sum_{k=1}^{3} A^k_{1i} V_k) \quad \text{(nach Tausch von } i, k \text{ in der ersten Summe)} \\
&= \sum_{i=1}^{3} A^i_{2j} W_i.
\end{aligned}$$

Die W_j erfüllen also längs $x^2 \mapsto (x^1, x^2)$ ebenfalls ein lineares, homogenes System. Da $W_j(x^1, 0) = 0$ nach Definition, folgt $W_j = 0$ auf ganz U aus dem Eindeutigkeitssatz, und die Gleichungen (9.3) sind verifiziert. Nach (9.4) sind die $A^i_{\alpha j} \in C^{k-2}$, und die Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen liefert $V_j \in C^{k-1}(U, \mathbb{R}^3)$.

Schritt 2: *Wir zeigen als nächstes*

$$\langle V_i, V_j \rangle = \begin{cases} g_{ij} & \text{für } 1 \leq i, j \leq 2, \\ 0 & \text{für } 1 \leq i \leq 2, j = 3, \\ 1 & \text{für } i = j = 3. \end{cases} \tag{9.12}$$

Dazu berechnen wir mit dem System (9.3)

$$\partial_\alpha \langle V_j, V_k \rangle = \sum_{i=1}^3 A^i_{\alpha j} \langle V_i, V_k \rangle + \sum_{i=1}^3 A^i_{\alpha k} \langle V_j, V_i \rangle.$$

Jetzt setzen wir die konkrete Form (9.4) der Koeffizienten ein, zwecks besserer Lesbarkeit in symbolischer Matrixform.

$$\partial_\alpha \begin{pmatrix} \langle V_\beta, V_\gamma \rangle \\ \langle V_\beta, V_3 \rangle \\ \langle V_3, V_3 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\nu} + \Gamma^\mu_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\nu} & h_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\nu} + h_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\nu} & 0 \\ -\sum_{\lambda=1}^2 h_{\alpha\lambda} g^{\lambda\mu} \delta_{\beta\nu} & \Gamma^\nu_{\alpha\beta} & h_{\alpha\beta} \\ 0 & -2\sum_{\lambda=1}^2 h_{\alpha\lambda} g^{\lambda\nu} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \langle V_\mu, V_\nu \rangle \\ \langle V_3, V_\nu \rangle \\ \langle V_3, V_3 \rangle \end{pmatrix}.$$

Wir zeigen jetzt, dass der Vektor $(g_{\beta\gamma}, 0, 1)$ ebenfalls dieses System löst, also

$$\partial_\alpha \begin{pmatrix} g_{\beta\gamma} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\nu} + \Gamma^\mu_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\nu} & h_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\nu} + h_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\nu} & 0 \\ -\sum_{\lambda=1}^2 h_{\alpha\lambda} g^{\lambda\mu} \delta_{\beta\nu} & \Gamma^\nu_{\alpha\beta} & h_{\alpha\beta} \\ 0 & -2\sum_{\lambda=1}^2 h_{\alpha\lambda} g^{\lambda\nu} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die dritte Zeile ist offensichtlich, die zweite folgt leicht:

$$-\sum_{\lambda,\mu=1}^2 h_{\alpha\lambda} g^{\lambda\mu} \delta_{\beta\nu} g_{\mu\nu} = -\sum_{\lambda=1}^2 h_{\alpha\lambda} \underbrace{\sum_{\mu=1}^2 g^{\lambda\mu} g_{\mu\beta}}_{=\delta_{\lambda\beta}} = -h_{\alpha\beta}.$$

Für die erste Zeile brauchen wir, dass die $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ durch die Formel (9.2) von Levi-Civita gegeben sind. Und zwar berechnen wir damit

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu=1}^2 \Gamma^\mu_{\alpha\beta} g_{\mu\gamma} + \sum_{\mu=1}^2 \Gamma^\mu_{\alpha\gamma} g_{\mu\beta} \\ = \;& \frac{1}{2} \sum_{\mu,\lambda=1}^2 g^{\mu\lambda} \big(\partial_\alpha g_{\beta\lambda} + \partial_\beta g_{\alpha\lambda} - \partial_\lambda g_{\alpha\beta} \big) g_{\mu\gamma} + \frac{1}{2} \sum_{\mu,\lambda=1}^2 g^{\mu\lambda} \big(\partial_\alpha g_{\gamma\lambda} + \partial_\gamma g_{\alpha\lambda} - \partial_\lambda g_{\alpha\gamma} \big) g_{\mu\beta} \\ = \;& \frac{1}{2} \big(\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta} + \partial_\alpha g_{\gamma\beta} + \partial_\gamma g_{\alpha\beta} - \partial_\beta g_{\alpha\gamma} \big) = \partial_\alpha g_{\beta\gamma}. \end{aligned}$$

Nach Wahl der V_i gilt (9.12) im Nullpunkt, und folgt dann mittels Eindeutigkeit längs der Koordinatenlinien $x^1 \mapsto (x^1, 0)$ sowie $x^2 \mapsto (x^1, x^2)$ wie in Schritt 1.

Schritt 3: *Konstruktion der Immersion F*
Auf $U = (-1,1)^2$ gilt nach Konstruktion

$$\partial_\alpha V_\beta = \sum_{\lambda=1}^{2} \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda V_\lambda + h_{\alpha\beta} V_3.$$

Die rechte Seite ist symmetrisch in α, β, also existiert $F \in C^k(U, \mathbb{R}^3)$ mit $V_\alpha = \partial_\alpha F$, und $F(0,0) = 0$. Es folgt $\langle \partial_\alpha F, \partial_\beta F \rangle = g_{\alpha\beta}$, somit ist F eine Immersion mit der gegebenen ersten Fundamentalform. Außerdem ist $\langle \partial_\alpha F, V_3 \rangle = \langle V_\alpha, V_3 \rangle = 0$ und $\langle V_3, V_3 \rangle = 1$, also ist $V_3 = N$ Einheitsnormale von F. Schließlich folgt

$$\langle \partial^2_{\alpha\beta} F, N \rangle = \langle \partial_\alpha V_\beta, V_3 \rangle = h_{\alpha\beta}.$$

Also hat F die zweite Fundamentalform h, und der Satz ist bewiesen. $\square$

Ausnahmsweise eine Bemerkung von einem höheren Standpunkt aus: für eine dreidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) ist TM ein Euklidisches Vektorbündel mit dem Levi-Civita Zusammenhang ∇^{TM} und zugehöriger Krümmung $R(\nabla^{TM})$. Ist $F : U \to M$ eine reguläre Fläche, so sind Vektorfelder längs F Schnitte im Pullback-Bündel $F^*(TM)$; insbesondere hat man die Basis $\partial_1 F, \partial_2 F, N$. In dieser Basis hat der Pullback-Zusammenhang $F^*(\nabla^{TM})$ die Koeffizienten $A^i_{\alpha j}$ aus (9.4), diese sind durch die $\Gamma^i_{\alpha j}$ und die $h_{\alpha\beta}$ gegeben. Nach einem Satz aus der Theorie der Vektorbündel vertauschen nun Krümmung und Pullback, das heißt $R\big(F^*(\nabla^{TM})\big) = F^*\big(R(\nabla^{TM})\big)$. Im Fall $M = \mathbb{R}^3$ ist natürlich $R(\nabla^{TM}) = 0$, und die Gleichung ist genau unsere Integrabilitätsbedingung, die Koeffizienten von $R\big(F^*(\nabla^{TM})\big)$ in der Basis $\partial_1 F, \partial_2 F, N$ stehen auf der linken Seite von Gleichung (9.5). Wir haben bewiesen, dass diese Gleichung auch hinreichend für die Existenz der Fläche ist.

10 Die geodätische Krümmung

Wir haben beobachtet, dass gewisse geometrische Größen für eine Fläche $F : U \to \mathbb{R}^3$ nicht wirklich von der Lage im Raum abhängen, sondern nur von den Längenverhältnissen auf der Fläche selbst. Salopp gesagt kann eine Ameise, die auf der Fläche umher krabbelt, diese Größen ermitteln. Klar gehören die Länge von Kurven (Lemma 6.1), der Winkel zwischen Tangentialvektoren (Lemma 6.2) und der Flächeninhalt (Gleichung 6.3) dazu, diese berechnen sich direkt aus der ersten Fundamentalform. Das gilt auch für die kovariante Ableitung, die zwar zunächst als Tangentialanteil von D^2F definiert wurde, die aber nach Satz 9.2 von Levi-Civita durch die g_{ij} berechenbar ist; entsprechendes gilt für die Gaußsche Krümmung nach Folgerung 9.3.

An dieser Stelle machen wir den Schritt, auf die Fläche im $\mathbb{R}^3$ ganz zu verzichten. Wir gehen also nur von einer Riemannschen Metrik $(g_{ij}) : U \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ auf einem Gebiet $U \subset \mathbb{R}^2$ aus, das heißt $G = (g_{ij})$ ist symmetrisch und positiv definit. Wir bezeichnen das Paar (U, g) als Riemannsches Gebiet. Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit ist kurz gesagt ein topologischer Raum (Hausdorffsch mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom), der lokal durch Riemannsche Gebiete gegeben ist. Die Idee zu diesem Konzept hat Riemann in seinem Habilitationsvortrag 1854 skizziert. Hier beschränken wir uns auf die lokale Situation, also auf Riemannsche Gebiete. Eine Fläche $F : U \to \mathbb{R}^3$ induziert auf U die Riemannsche Metrik $g_{ij} = \langle \partial_i F, \partial_j F\rangle$, also die erste Fundamentalform. Der abstrakte Ansatz liefert auch Informationen über klassische Flächen.

Definition 10.1 (Kovariante Ableitung) *Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen. Für eine Riemannsche Metrik $(g_{ij}) \in C^1(U, \mathbb{R}^{2\times 2})$ sind die Christoffelsymbole definiert durch*

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2} g^{kl}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}).$$

Die zugehörige kovariante Ableitung für Vektorfelder $\xi, \eta \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$ ist

$$\nabla_\xi \eta = D_\xi \eta + \Gamma(\xi, \eta) \quad \textit{mit } \Gamma(\xi,\eta) = \sum_{i,j,k=1}^{2} \xi^i \eta^j \Gamma_{ij}^k e_k.$$

Der Beweis der Rechenregeln für die kovariante Ableitung in Satz 9.1 benutzt die Darstellung über den Tangentialanteil der Fläche. Dies geht jetzt nicht, wir müssen anders argumentieren.

Satz 10.1 (Eigenschaften von ∇, Riemannsch) *Für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und C^1-Vektorfelder ξ, η erfüllt $\nabla_\xi \eta$ folgende Rechenregeln:*

(1) $\nabla_{\lambda\xi_1+\mu\xi_2}\eta = \lambda\nabla_{\xi_1}\eta + \mu\nabla_{\xi_2}\eta$ *und* $\nabla_\xi(\lambda\eta_1 + \mu\eta_2) = \lambda\nabla_\xi\eta_1 + \mu\nabla_\xi\eta_2$ *(Linearität).*

(2) $\nabla_{\varphi\xi}\eta = \varphi\nabla_\xi\eta$ *für* $\varphi \in C^1(U)$ *(Linearität bzgl. Funktionen in ξ).*

(3) $\nabla_\xi(\varphi\eta) = \varphi\nabla_\xi\eta + (D_\xi\varphi)\eta$ *(Produktregel in η).*

(4) $\nabla_\xi \eta - \nabla_\eta \xi = [\xi, \eta]$ *(Symmetrie).*

(5) $D_\xi\big(g(\eta_1, \eta_2)\big) = g(\nabla_\xi \eta_1, \eta_2) + g(\eta_1, \nabla_\xi \eta_2)$ *(Produktregel bzgl. g).*

Beweis: Die Eigenschaften (1),(2),(3) folgen direkt aus Definition 10.1. Für die Symmetrie (4) reicht der Fall $\xi = e_1$, $\eta = e_2$, die allgemeine Aussage ergibt sich dann wie im Beweis von Folgerung 9.1. Aus $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ folgt nun

$$\nabla_{e_1} e_2 - \nabla_{e_2} e_1 = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{12}^k e_k - \sum_{k=1}^2 \Gamma_{21}^k e_k = 0 = [e_1, e_2].$$

Die Produktregel (5) zeigen wir ebenfalls erst für die Koordinatenfelder $\xi = e_i$, $\eta_1 = e_j$ und $\eta_2 = e_l$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} g(\nabla_{e_i} e_j, e_l) &= \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k \, g_{kl} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^2 \underbrace{\sum_{k=1}^2 g^{km} g_{kl}}_{=\delta_{lm}} (\partial_i g_{jm} + \partial_j g_{im} - \partial_m g_{ij}) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}). \end{aligned}$$

Durch Vertauschen der Indizes j, l und Addition folgt die gewünschte Formel

$$g(\nabla_{e_i} e_j, e_l) + g(e_j, \nabla_{e_i} e_l) = \partial_i g_{jl} = \partial_i \, g(e_j, e_l).$$

Für allgemeine Vektorfelder ξ, η_1, η_2 ergibt sich (5) nun durch Entwickeln in der Standardbasis und Anwenden der Linearität und Produktregel, also mit den Formeln (1),(2) und (3). $\square$

Definition 10.2 *Sei $g \in C^1(U, \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ Riemannsche Metrik auf $U \subset \mathbb{R}^2$, und $\gamma \in C^1(I, U)$. Die kovariante Ableitung eines Vektorfelds $\xi \in C^1(I, \mathbb{R}^2)$ längs γ ist definiert durch*

$$\frac{\nabla \xi}{dt}(t) = \frac{d\xi}{dt}(t) + \Gamma(\gamma(t))\big(\gamma'(t), \xi(t)\big).$$

Um die Notation übersichtlich zu halten, wird der Fußpunkt $\gamma(t)$ oft nicht explizit notiert, man schreibt zum Beispiel

$$\frac{\nabla \xi}{dt} = \frac{d\xi}{dt} + \Gamma(\gamma', \xi).$$

Lemma 10.1 (Rechenregeln für $\frac{\nabla}{dt}$) *Sei $g \in C^1(U, \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ Riemannsche Metrik auf U. Für die kovariante Ableitung längs einer Kurve $\gamma \in C^1(I, U)$ gelten folgende Rechenregeln:*

$$\frac{\nabla(\lambda\xi + \mu\eta)}{dt} = \lambda \frac{\nabla \xi}{dt} + \mu \frac{\nabla \eta}{dt} \quad \text{für } \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \tag{10.1}$$

$$\frac{\nabla(\varphi\xi)}{dt} = \varphi \frac{\nabla \xi}{dt} + \varphi' \xi \quad \text{für } \varphi \in C^1(I), \tag{10.2}$$

$$\frac{d}{dt} g(\xi, \eta) = g\Big(\frac{\nabla \xi}{dt}, \eta\Big) + g\Big(\xi, \frac{\nabla \eta}{dt}\Big). \tag{10.3}$$

Beweis: (10.1) und (10.2) folgen aus Definition 10.2. Für (10.3) betrachte $\xi = e_i$, $\eta = e_j$; für die allgemeine Aussage entwickle in die Standardbasis und wende die Produktregel (10.2) an. Aus der Produktregel (5) aus Satz 10.1 folgt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\, g(e_i, e_j) &= D_{\gamma'(t)}\, g(e_i, e_j) \\ &= g(\nabla_{\gamma'(t)} e_i, e_j) + g(e_i, \nabla_{\gamma'(t)} e_j) \\ &= g\big(\frac{\nabla e_i}{dt}, e_j\big) + g\big(e_i, \frac{\nabla e_j}{dt}\big).\end{aligned}$$

□

Lemma 10.2 (Symmetrie von ∇) *Sei $g \in C^1(U, \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ Riemannsche Metrik. Dann gilt für $f \in C^2(I \times J, U)$, $f = f(t, \varepsilon)$,*

$$\frac{\nabla}{\partial \varepsilon} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}.$$

Beweis: Nach Definition 10.2 gilt

$$\frac{\nabla}{\partial \varepsilon} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{\partial f}{\partial t} + \Gamma\left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial f}{\partial t}\right).$$

Die Behauptung folgt nun aus der Symmetrie $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. □

Mit der kovarianten Ableitung haben wir das Werkzeug, um weitere geometrische Größen zu definieren. Wir beginnen mit der Parallelverschiebung längs einer Kurve. Für $g \in C^1(U, \mathbb{R}^{2\times 2})$ und eine gegebene Kurve $\gamma \in C^1(I, U)$, $I = [a, b]$, ist die Gleichung

$$\frac{\nabla \xi}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\xi}{dt} + \Gamma \circ \gamma(\gamma', \xi) = 0$$

ein lineares, homogenes System erster Ordnung für das gesuchte Vektorfeld $\xi \in C^1(I, \mathbb{R}^2)$. Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz bilden die zugehörigen Lösungen einen 2-dimensionalen Untervektorraum von $C^1(I, \mathbb{R}^2)$. Im Fall $g_{ij} = \delta_{ij}$ ist $\frac{\nabla \xi}{dt} = \frac{d\xi}{dt}$ die gewöhnliche Ableitung, und die Lösungen $\xi(t)$ sind genau die konstanten vektorwertigen Funktionen. Deshalb werden die Lösungen der Gleichung $\frac{\nabla \xi}{dt} = 0$ allgemein als parallele Vektorfelder längs γ bezüglich g bezeichnet. Zu gegebenem $v \in \mathbb{R}^2$ bezeichne $\xi_v \in C^1(I, \mathbb{R}^2)$ das eindeutige Vektorfeld mit

$$\frac{\nabla \xi_v}{dt} = 0,\ \xi_v(a) = v.$$

Die Abbildung $P_\gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $P_\gamma(v) = \xi_v(b)$, ist linear nach (10.1). Sind ξ, η parallel längs γ bezüglich g, so gilt außerdem $g(\xi, \eta) = \text{const.}$ nach (10.3). Daher ist die Abbildung $P_\gamma : (\mathbb{R}^2, g|_{\gamma(a)}) \to (\mathbb{R}^2, g|_{\gamma(b)})$ eine Isometrie, also orthogonal. Während im Euklidischen die Parallelität von Vektoren in zwei Punkten unabhängig von einer Verbindungskurve erklärt ist, hängt die Parallelverschiebung P_γ für eine Riemannsche Metrik g im allgemeinen von der Verbindungskurve γ ab. Bei der nachfolgenden Definition orientieren wir uns am Euklidischen Fall, siehe Definition 2.1, nur wird die übliche Ableitung durch die kovariante Ableitung ersetzt.

Definition 10.3 (Geodätische Krümmung) *Sei $g \in C^1(U,\mathbb{R}^2,\times\mathbb{R}^2)$ Riemannsche Metrik. Der geodätische Krümmungsvektor einer regulären Kurve $\gamma \in C^2(I,U)$ ist*

$$\vec{\varkappa}_g = \frac{1}{\|\gamma'\|_g^2}\Big(\frac{\nabla\gamma'}{dt}\Big)^{\perp_g},$$

wobei $\perp_g$ die Komponente senkrecht zu γ' bezüglich g bezeichnet. Die geodätische Krümmung bezüglich der g-Einheitsnormale ν längs γ ist

$$\varkappa_g = g(\vec{\varkappa}_g,\nu) = \frac{1}{\|\gamma'\|_g^2}\, g\Big(\frac{\nabla\gamma'}{dt},\nu\Big).$$

Die Invarianz unter Umparametrisierungen folgt wie im Euklidischen, mit etwas mehr Aufwand: für $\varphi \in C^1(J,I)$ diffeomorph gilt $(\gamma\circ\varphi)' = (\gamma'\circ\varphi)\varphi'$ und weiter

$$\begin{aligned}
\frac{\nabla(\gamma\circ\varphi)'}{dt} &= \frac{\nabla(\gamma'\circ\varphi)}{dt}\varphi' + (\gamma'\circ\varphi)\varphi'' \\
&= (\gamma''\circ\varphi)\,(\varphi')^2 + \Gamma(\gamma\circ\varphi)(\gamma'\circ\varphi,\gamma'\circ\varphi)\,(\varphi')^2 + (\gamma'\circ\varphi)\,\varphi''.
\end{aligned}$$

Es gilt somit $\|(\gamma\circ\varphi)'\|_g^2 = \|\gamma'\|_g^2\circ\varphi\,(\varphi')^2$ und, da $\gamma'\circ\varphi$ tangential,

$$\vec{\varkappa}^{\gamma\circ\varphi} = \frac{1}{\|\gamma'\|_g^2}\circ\varphi\,\Big(\gamma''\circ\varphi + \Gamma(\gamma\circ\varphi)(\gamma'\circ\varphi,\gamma'\circ\varphi)\Big)^{\perp_{\gamma\circ\varphi}} = \vec{\varkappa}_g^{\gamma}\circ\varphi.$$

Ist die Kurve nach der Bogenlänge bezüglich g parametrisiert, also $\|\gamma'\|_g = 1$, so wird die Formel einfacher. Es gilt dann

$$0 = \frac{d}{ds}g(\gamma',\gamma') = 2g\Big(\frac{\nabla\gamma'}{ds},\gamma'\Big),$$

das heißt $\frac{\nabla\gamma'}{ds}$ ist normal und es folgt

$$\vec{\varkappa}_g = \frac{\nabla\gamma'}{ds} \quad\text{bzw.}\quad \varkappa_g = g\Big(\frac{\nabla\gamma'}{ds},\nu\Big). \tag{10.4}$$

Beispiel 10.1 (Geodätische Krümmung für konforme Metriken) Betrachte auf dem Gebiet $U \subset \mathbb{R}^2$ die Riemannsche Metrik

$$g_{ij} = e^{2u}\delta_{ij} \quad \text{wobei } u \in C^1(U).$$

In Beispiel 9.1 hatten wir schon die Formel für die Christoffelsymbole

$$\Gamma_{ij}^k = (\partial_i u)\delta_{jk} + (\partial_j u)\delta_{ik} - (\partial_k u)\delta_{ij}.$$

Für $v \in \mathbb{R}^2$ folgt

$$\Gamma(v,v) = \sum_{i,j=1}^{3}\big((\partial_i u)\delta_{jk} + (\partial_j u)\delta_{ik} - (\partial_k u)\delta_{ij}\big)\, v^i v^j e_k = 2\langle Du,v\rangle\, v - |v|^2 Du.$$

Sei nun $c \in C^2(I,U)$ eine Kurve, die nach der Bogenlänge bezüglich g parametrisiert ist, und ν_g Einheitsnormale bezüglich g längs c. Dann ist $|c'| = e^{-u\circ c}$, $\nu = e^{u\circ c}\nu_g$ ist die Euklidische Einheitsnormale, und wir haben

$$\Gamma\circ c(c',c') = 2\big\langle Du\circ c, c'\big\rangle\, c' - |c'|^2 Du\circ c.$$

Damit berechnen wir die geodätische Krümmung bezüglich ν_g:

$$\begin{aligned}
\varkappa_g &= g\big(c'' + \Gamma \circ c(c', c')\,,\, \nu_g\big) \\
&= e^{u \circ c} \big\langle c'' + \Gamma \circ c(c', c')\,,\, \nu \big\rangle \\
&= e^{u \circ c} \langle c'' - |c'|^2 Du \circ c, \nu \rangle \\
&= e^{u \circ c} |c'|^2 \big(\varkappa - \langle Du \circ c, \nu \rangle\big) \\
&= e^{-u \circ c} \big(\varkappa - \langle Du \circ c, \nu \rangle\big).
\end{aligned}$$

Hier ist $\varkappa$ die Euklidische Krümmung von c bezüglich der Normalen ν, siehe Definition 3.2. Für die Totalkrümmung von $c : I \to U$ folgt

$$\int_c \varkappa_g \, ds_g = \int_c \Big(\varkappa - \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big)\, ds. \tag{10.5}$$

Im Euklidischen Fall tritt der Krümmungsvektor in der ersten Variation der Bogenlänge auf. Das gilt analog hier.

Satz 10.2 (Erste Variation der Bogenlänge) *Sei $c \in C^2(I \times (-\varepsilon, \varepsilon), U)$ mit $I = [a, b]$, und $c = c(\cdot, 0)$ sei regulär. Dann gilt bezüglich der Riemannschen Metrik $g \in C^1(U, \mathbb{R}^{2\times 2})$*

$$\frac{d}{d\varepsilon} L_g(c(\cdot, \varepsilon))\Big|_{\varepsilon=0} = -\int_I g\big(\vec{\varkappa}_g, \phi\big)\, ds_g + \Big[g\big(\tau(t), \phi(t)\big)\Big]_{t=a}^{t=b} \qquad \text{für } \phi = \frac{\partial c}{\partial \varepsilon}(\cdot, 0).$$

Dabei ist τ die g-Einheitstangente von c und $ds_g = \|c'(t)\|_g \, dt$.

Beweis: Wir berechnen mit der Produktregel (10.3) und Lemma 10.2

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\varepsilon} L_g(c(\cdot, \varepsilon))\Big|_{\varepsilon=0} &= \frac{d}{d\varepsilon} \int_I g\Big(\frac{\partial c}{\partial t}(t, \varepsilon), \frac{\partial c}{\partial t}(t, \varepsilon)\Big)^{\frac{1}{2}} \, dt\Big|_{\varepsilon=0} \\
&= \int_I g\Big(\frac{\nabla}{\partial \varepsilon}\frac{\partial c}{\partial t}(t, 0), \tau(t)\Big)\, dt \\
&= \int_I g\Big(\frac{\nabla \phi}{\partial t}(t), \tau(t)\Big)\, dt \\
&= -\int_I g\Big(\phi(t), \frac{\nabla \tau}{dt}(t)\Big)\, dt + \Big[g\big(\tau(t), \phi(t)\big)\Big]_{t=a}^{t=b}.
\end{aligned}$$

Aber es gilt für jede reguläre Kurve mit $\tau = \frac{c'}{\|c'\|_g}$

$$\frac{\nabla \tau}{dt} = \|c'\|^{-1}\Big(\frac{\nabla c'}{dt} - g\big(\frac{\nabla c'}{dt}, \tau\big)\tau\Big) = \vec{\varkappa}_g \|c'\|_g.$$

Einsetzen liefert nun die Behauptung. □

Definition 10.4 (Geodätische) *Sei $g \in C^1(U, \mathbb{R}^{2\times 2})$ Riemannsche Metrik. Eine Kurve $\gamma \in C^2(I, U)$ heißt Geodätische bzgl. g, falls gilt:*

$$\frac{\nabla \gamma'}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma'' + \Gamma \circ \gamma(\gamma', \gamma') = 0.$$

Jede konstante Kurve ist geodätisch. Die nichtkonstanten Geodätischen sind wie folgt charakterisiert.

Folgerung 10.1 *Sei $g \in C^1(U, \mathbb{R}^{2\times 2})$ Riemannsche Metrik. Für eine nichtkonstante Kurve $c \in C^2(I, U)$, $I = [a, b]$, sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *c ist Geodätische.*

(2) *c hat konstante Geschwindigkeit und geodätische Krümmung Null.*

Beweis: Für jedes $c \in C^2(I, U)$ gilt nach der Produktregel (10.3)

$$\frac{d}{dt}\|c'\|_g^2 = 2\, g\big(c', \frac{\nabla c'}{dt}\big).$$

Ist c Geodätische, so ist $\|c'\|_g$ konstant ungleich null, und

$$\vec{\varkappa}_g = \frac{1}{\|c'\|_g^2}\Big(\frac{\nabla c'}{dt}\Big)^{\perp_g} = 0.$$

Umgekehrt: ist $\|c'\|_g$ konstant $\neq 0$, so folgt $\frac{\nabla c'}{dt} \perp c'$, und aus $\vec{\varkappa}_g = 0$

$$\frac{\nabla c'}{dt} = \Big(\frac{\nabla c'}{dt}\Big)^{\perp_g} = \|c'\|_g^2 \vec{\varkappa}_g = 0,$$

das heißt c ist Geodätische. □

Die geodätische Gleichung ist ein System von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in expliziter Form, das heißt $\gamma'' = F(\gamma, \gamma')$. Um lokal Geodätische zu konstruieren, kann man daher für gegebene $z_0 \in U$, $v \in \mathbb{R}^2$ das zugehörige Anfangswertproblem mit dem Satz von Picard-Lindelöf lösen:

$$\gamma'' + \Gamma \circ \gamma(\gamma', \gamma') = 0, \quad \gamma(0) = z_0,\, \gamma'(0) = v.$$

Für $g_{ij} \in C^2(U)$ gibt es ein maximales Intervall (a, b) mit $a < 0 < b$, auf dem eine Lösung existiert, und diese ist eindeutig bestimmt. Weiter besagt die allgemeine Theorie: ist $b < \infty$, so verlässt $(\gamma(t), \gamma'(t))$ für $t \nearrow b$ jede kompakte Teilmenge von $U \times \mathbb{R}^2$. In unserm Fall gilt mehr, denn Folgerung 10.1 liefert folgende Abschätzung:

$$\gamma(t) \in K \subset\subset U \quad \Rightarrow \quad |\gamma'(t)| \leq C(g, K)\, \|\gamma'(t)\|_g = C(g, K)\, \|\gamma'(0)\|_g.$$

Daher muss für $b < \infty$ schon $\gamma(t)$ mit $t \nearrow b$ jede kompakte Teilmenge von U verlassen; dies gilt natürlich analog im Fall $a > -\infty$. Die höhere Differenzierbarkeit der Geodätischen ergibt sich leicht aus dem System und der Definition der Christoffelsymbole. Für eine Riemannsche Metrik $g_{ij} \in C^r(U)$ mit $r \geq 1$ ist $\Gamma_{ij}^k \in C^{r-1}(U)$, und die Geodätischen sind dann von der Klasse $C^{r+1}(I, U)$.

Für die Euklidische Metrik $g_{ij} = \delta_{ij}$ auf $U = \mathbb{R}^2$ lautet die geodätische Gleichung $\gamma'' = 0$. Eine Euklidische Geodätische $\gamma : [a, b] \to (\mathbb{R}^2, \delta_{ij})$ ist also durch die gerade Strecke zwischen den Endpunkten gegeben, die mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen wird; insbesondere ist sie kürzeste Verbindung der Endpunkte. Für eine beliebige Riemannsche Metrik $g \in C^1(U, \mathbb{R}^{2\times 2})$ sind Geodätische zumindest Kandidatinnen für kürzeste Verbindungen. Angenommen $c \in C^2(I, U)$, $I = [a, b]$, ist Kürzeste von $c(a)$ nach $c(b)$, und c sei nach der g-Bogenlänge parametrisiert. Ist dann $c \in C^2(I \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0), U)$ mit

$$c(\cdot, 0) = c \quad \text{sowie } c(a, \varepsilon) = c(a),\ c(b, \varepsilon) = c(b) \text{ für alle } \varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0),$$

so folgt aus Satz 10.2 notwendig

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} L_g(c(\cdot, \varepsilon))\Big|_{\varepsilon=0} = -\int_I g(\vec{\varkappa}_g, \phi)\, ds_g \qquad \text{für } \phi = \frac{\partial c}{\partial \varepsilon}(\cdot, 0).$$

Für jedes $\phi \in C_c^2((a, b), \mathbb{R}^2)$ ist die Variation $c(t, \varepsilon) = c(t) + \varepsilon\phi(t)$ hier zulässig. Aus dem Fundamentallemma der Variationsrechnung folgt, dass c geodätische Krümmung Null hat und damit eine Geodätische ist. Hier schließen sich interessante Fragen an:

- Gibt es zu zwei Punkten immer eine kürzeste Verbindung?
- Sind Kürzeste hinreichend oft differenzierbar, und sind sie regulär?
- Gibt es Kriterien dafür, dass eine Geodätische tatsächlich kürzeste Verbindung ihrer Endpunkte ist?

Wir kommen nun kurz zu den parametrisierten Flächen im $\mathbb{R}^3$ zurück. Im folgenden Lemma schreiben wir wieder Fußpunkt $\gamma(t)$ nicht mit aus Gründen der Übersichtlichkeit.

Lemma 10.3 *Sei $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche mit Normale N, $\gamma \in C^2(I, U)$ und $\xi \in C^1(I, \mathbb{R}^2)$. Dann gilt längs $\gamma(t)$*

$$\frac{d}{dt}\big(DF \cdot \xi\big) = DF \cdot \frac{\nabla \xi}{dt} + h(\gamma', \xi)\, N.$$

Hier ist ∇ kovariante Ableitung von g und h zweite Fundamentalform bzgl. N.

Beweis: Dies folgt direkt aus Satz 9.3 und Satz 9.2. □

Wir können jetzt die klassische Charakterisierung der Geodätischen auf Flächen im $\mathbb{R}^3$ herleiten, die auf Johann Bernoulli (1698) zurückgeht. Sie besagt, dass geodätische Kurven keine Beschleunigung tangential zur Fläche haben.

Satz 10.3 *Sei $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ reguläre Fläche mit erster Fundamentalform g und Normale N, und $\gamma \in C^2(I, U)$. Mit $c = F \circ \gamma : I \to \mathbb{R}^3$ sind dann folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *γ ist Geodätische bezüglich g.*

(2) *$(c'')^\top = 0$.*

(3) *$c'' = h(\gamma', \gamma')N$.*

BEWEIS: Mit $\xi = \gamma'$ folgt aus Lemma 10.3

$$c'' = (F \circ \gamma)'' = DF \cdot \frac{\nabla \gamma'}{dt} + h(\gamma', \gamma')N.$$

$\square$

Eine explizite Lösung der geodätischen Differentialgleichung ist im allgemeinen nicht möglich. Für Rotationsflächen hat man einen Erhaltungssatz, mit dessen Hilfe die Geodätischen qualitativ gut beschrieben werden können, siehe Band 3, pp. 315-319, in M. Spivak, *A comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Publish or Perish, Boston 1975. Der Erhaltungssatz folgt aus der Tatsache, dass Drehungen um die Rotationsachse Isometrien der Fläche sind.

Beispiel 10.2 Sei $c(s) = (r(s), h(s))$, $s \in (\alpha, \beta)$, eine nach der Bogenlänge parametrisierte C^2-Kurve mit $r(s) > 0$. Betrachte die Rotationsfläche

$$F : (\alpha, \beta) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ F(s, \varphi) = (r(s)\cos\varphi, r(s)\sin\varphi, h(s)).$$

Die erste Fundamentalform von F lautet

$$g(s, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r(s)^2 \end{pmatrix}.$$

Sei $\gamma(t) = (s(t), \varphi(t))$, $t \in [a, b]$, eine gegebene Kurve. Dann folgt für die Kurven $\gamma_\varepsilon(t) = \big(s(t), \varphi(t) + \varepsilon\big)$ mit $\varepsilon \in \mathbb{R}$ beliebig

$$L_g(\gamma_\varepsilon) = \int_a^b \sqrt{s'(t)^2 + r(s(t))^2\, \varphi'(t)^2}\, ds = L_g(\gamma).$$

Ist γ Geodätische, so ergibt sich aus der Variationsformel, Satz 10.2,

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} L_g(\gamma_\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \Big[g\Big(\frac{\gamma'}{\|\gamma'\|_g}, e_2\Big)\Big]_{s=a}^{s=b}.$$

Da die Grenzen a und b beliebig gewählt werden können, bedeutet das:

$$g\Big(e_2, \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|_g}\Big) \text{ *ist längs jeder Geodätischen* } \gamma \text{ *konstant.*}$$

Die Kurve $F \circ \gamma_\varepsilon$ entsteht durch Rotation von $F \circ \gamma$ um die z-Achse, genauer

$$F \circ \gamma_\varepsilon = S_\varepsilon \cdot (F \circ \gamma) \quad \text{mit } S_\varepsilon = \begin{pmatrix} \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon & 0 \\ \sin\varepsilon & \cos\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für $c(t) = F(\gamma(t))$ gilt nun

$$g\Big(e_2, \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|_g}\Big) = \varrho(t) \left\langle \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{c'}{|c'|} \right\rangle \quad \text{wobei } \varrho(t) = r(s(t)).$$

Damit hat der Erhaltungssatz in $\mathbb{R}^3$ folgende Interpretation.

Satz von Clairaut (1733): *bezeichnet $\beta(t) \in [0, \pi]$ den Winkel, mit dem die Geodätische $c(t)$ den Breitenkreis mit Radius $\varrho(t)$ schneidet, so ist $\varrho(t) \cos \beta(t)$ konstant.*

Zum Schluss des Kapitels kommen wir zu einem wichtigen Thema, nämlich der Invarianz der kovarianten Ableitung und der geodätischen Krümmung bei Umparametrisierungen.

Definition 10.5 (Riemannsche Isometrie) *Sei h Riemannsche Metrik auf der offenen Menge $V \subset \mathbb{R}^2$, und $\phi : U \to V$ sei ein C^1-Diffeomorphismus. Die Pullback-Metrik $\phi^* h$ auf U ist gegeben durch*

$$\phi^* h(x)(v, w) := h(\phi(x))(D\phi(x)v, D\phi(x)w) \text{ für alle } x \in U,\ v, w \in \mathbb{R}^2.$$

Ein C^1-Diffeomorphismus $\phi : (U, g) \to (V, h)$ von Riemannschen Gebieten mit $g = \phi^* h$ heißt Riemannsche Isometrie.

Mit anderen Worten, ein Diffeomorphismus $\phi : (U, g) \to (V, h)$ ist genau dann eine Isometrie wenn für alle $x \in U$ gilt

$$D\phi(x) : \big(\mathbb{R}^2, g(x)\big) \to \big(\mathbb{R}^2, h(\phi(x))\big)$$

ist eine orthogonale lineare Abbildung. Damit ist ϕ längentreu, für $\gamma : I \to U$ gilt

$$L_h(\phi \circ \gamma) = \int_I \|(\phi \circ \gamma)'\|_h \, dt = \int_I \|D\phi \cdot \gamma'\|_h \, dt = \int_I \|\gamma'\|_g \, dt = L_g(\gamma).$$

Wir erwarten, dass alle Riemannsch definierten Größen in geeignetem Sinn unter Riemannschen Isometrien invariant sind. Isometrische Riemannsche Gebiete sollen nur verschiedene konkrete Modelle ein und derselben Geometrie darstellen. Wir werden das später noch am Beispiel der hyperbolischen Ebene deutlich sehen. Wir beginnen mit der geodätischen Krümmung.

Satz 10.4 (Invarianz von $\vec{\varkappa}_g$) *Sei $\phi : (U, g) \to (V, h)$ eine Riemannsche Isometrie. Für eine reguläre Kurve $\gamma \in C^2(I, U)$, $I = [a, b]$, gilt*

$$\vec{\varkappa}_h^{\phi \circ \gamma}(t) = D\phi(\gamma(t))\, \vec{\varkappa}_g^{\gamma}(t) \quad \text{für alle } t \in [a, b]. \tag{10.6}$$

Für die skalaren Krümmungen bezüglich ν_g^γ und $\nu_h^{\phi \circ \gamma} = D\phi \cdot \nu_g^\gamma$ gilt $\varkappa_h^{\phi \circ \gamma} = \varkappa_g^\gamma$.

Beweis: Wir verwenden die Invarianz der Bogenlänge bei Riemannschen Isometrien, in Verbindung mit der Formel für die erste Variation der Länge. Sei $\xi \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$ gegeben mit $\xi(a) = \xi(b) = 0$. Betrachte die Schar $c(t, \varepsilon) = \gamma(t) + \varepsilon \xi(t)$ für $(t, \varepsilon) \in I \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$. Es gilt $c(t, 0) = \gamma(t)$, $(\phi \circ c)(t, 0) = \phi(\gamma(t))$ und

$$\frac{\partial c}{\partial \varepsilon}(t, 0) = \xi(t) \quad \text{sowie} \quad \frac{\partial (\phi \circ c)}{\partial \varepsilon}(t, 0) = D\phi(\gamma(t))\xi(t).$$

Wegen $L^h(\phi \circ c(\cdot, \varepsilon)) = L^g(c(\cdot, \varepsilon))$ folgt durch Ableitung bei $\varepsilon = 0$ mit Satz 10.2

$$\int_I h\big(\vec{\varkappa}^{\phi \circ \gamma}, D\phi \cdot \xi\big)\, ds^{\phi \circ \gamma} = \int_I g\big(\vec{\varkappa}^{\gamma}, \xi\big)\, ds^{\gamma}.$$

Aus $g = \phi^* h$ folgt aber, wobei ϕ und $D\phi$ an der Stelle $\gamma(t)$ auszuwerten sind,

$$\begin{aligned}\int_I h\big(\vec{\varkappa}^{\phi\circ\gamma}, D\phi\cdot\xi\big)\,ds^{\phi\circ\gamma} &= \int_I h\big(D\phi\,D\phi^{-1}\vec{\varkappa}^{\phi\circ\gamma}, D\phi\cdot\xi\big)\,ds^{\gamma}\\ &= \int_I g\big(D\phi^{-1}\vec{\varkappa}^{\phi\circ\gamma},\xi\big)\,ds^{\gamma}.\end{aligned}$$

Das Fundamentallemma der Variationsrechnung impliziert nun $D\phi^{-1}\vec{\varkappa}^{\phi\circ\gamma} = \vec{\varkappa}^{\gamma}$ wie behauptet. Weiter folgt mit $\nu^{\phi\circ\gamma} = D\phi\cdot\nu^{\gamma}$

$$\varkappa^{\phi\circ\gamma} = h(\vec{\varkappa}^{\phi\circ\gamma},\nu^{\phi\circ\gamma}) = h(D\phi\cdot\vec{\varkappa}^{\gamma}, D\phi\cdot\nu^{\gamma}) = g(\vec{\varkappa}^{\gamma},\nu^{\gamma}) = \varkappa^{\gamma}.$$

□

Wir wollen die Transformation der vollen kovarianten Ableitung auf die geodätische Krümmung zurückführen. Zuvor eine Hilfsaussage, die nichts mit der Riemannschen Metrik zu tun hat. Zur Erinnerung: zwei Vektorfelder $\xi \in C^1(U,\mathbb{R}^2)$, $\tilde{\xi} \in C^1(V,\mathbb{R}^2)$ heißen ϕ-verwandt, wobei $\phi \in C^1(U,V)$, wenn gilt

$$\tilde{\xi}\circ\phi = D\phi\cdot\xi \quad \text{auf } U.$$

Lemma 10.4 *Sei $\phi \in C^2(U,V)$. Sind $\xi,\eta \in C^1(U,\mathbb{R}^2)$ ϕ-verwandt zu $\tilde{\xi},\tilde{\eta} \in C^1(V,\mathbb{R}^2)$, so ist $[\xi,\eta]$ auch ϕ-verwandt zu $[\tilde{\xi},\tilde{\eta}]$:*

$$[\tilde{\xi},\tilde{\eta}]\circ\phi = D\phi\cdot[\xi,\eta].$$

Beweis: Wir berechnen mit der Eigenschaft (8.6) des Kommutators

$$\begin{aligned}D\phi\cdot[\xi,\eta] &= \partial_\xi\big(\partial_\eta\phi\big) - \partial_\eta\big(\partial_\xi\phi\big)\\ &= \partial_\xi\big(\tilde{\eta}\circ\phi\big) - \partial_\eta\big(\tilde{\xi}\circ\phi\big)\\ &= (D\tilde{\eta})\circ\phi\cdot D\phi\cdot\xi - (D\tilde{\xi})\circ\phi\cdot D\phi\cdot\eta\\ &= (D\tilde{\eta})\circ\phi\cdot\tilde{\xi}\circ\phi - (D\tilde{\xi})\circ\phi\cdot\tilde{\eta}\circ\phi\\ &= \big(D\tilde{\eta}\cdot\tilde{\xi} - D\tilde{\xi}\cdot\tilde{\eta}\big)\circ\phi\\ &= [\tilde{\xi},\tilde{\eta}]\circ\phi.\end{aligned}$$

□

Satz 10.5 (Invarianz der kovarianten Ableitung) *Sei $\phi \in C^2(U,V)$ Riemannsche Isometrie bezüglich g,h. Sind $X,Y \in C^1(U,\mathbb{R}^2)$ ϕ-verwandt zu $\tilde{X},\tilde{Y} \in C^1(V,\mathbb{R}^2)$, so ist $\nabla^g_X Y$ auch ϕ-verwandt zu $\nabla^h_{\tilde{X}}\tilde{Y}$:*

$$\big(\nabla^h_{\tilde{X}}\tilde{Y}\big)\circ\phi = D\phi\cdot\nabla^g_X Y..$$

Beweis: Aus der Linearität und Symmetrie der kovarianten Ableitung, siehe (1) und (4) in Satz 10.1, folgt die Darstellung

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}\Big(\nabla_{X+Y}(X+Y) - \nabla_X X - \nabla_Y Y + [X,Y]\Big).$$

Nach Lemma 10.4 sind $[X,Y]$ und $[\tilde{X},\tilde{Y}]$ ϕ-verwandt, deshalb reicht es den Fall $Y = X$ zu behandeln. Wir zeigen die Aussage erst für $\|X\|_g \equiv 1$. Längs einer Integralkurve γ von X gilt dann $\gamma''(t) = \frac{d}{dt}X(\gamma(t)) = DX(\gamma(t)X(\gamma(t))$, also

$$\vec{\varkappa}^\gamma = \frac{\nabla\gamma'}{ds} = \gamma'' + \Gamma(\gamma',\gamma') = \big(D_X X + \Gamma(X,X)\big)\circ\gamma = (\nabla_X X)\circ\gamma.$$

Nun ist auch $\|\tilde{X}\|_h = 1$, und $\phi\circ\gamma$ ist Integralkurve von $\tilde{X}$, also liefert Satz 10.4

$$(D\phi\cdot\nabla_X X)\circ\gamma = D\phi\circ\gamma\cdot\vec{\varkappa}^\gamma = \vec{\varkappa}^{\phi\circ\gamma} = (\nabla_{\tilde{X}}\tilde{X})\circ(\phi\circ\gamma).$$

Die Behauptung folgt, da jedes $x \in U$ auf einer (lokal definierten) Integralkurve von X liegt. Für $f \in C^1(U)$ gilt nun $\widetilde{fX} = \tilde{f}\tilde{X}$ mit $\tilde{f} = f\circ\phi^{-1}$, sowie

$$(D\tilde{f}\cdot\tilde{X})\circ\phi = D\tilde{f}\cdot D\phi\cdot X = Df\cdot X.$$

Damit folgt weiter für $\|X\|_g \equiv 1$

$$\begin{aligned}
\nabla^h_{\widetilde{fX}}(\widetilde{fX})\circ\phi &= \big(\tilde{f}^2\nabla_{\tilde{X}}\tilde{X} + \tilde{f}(D\tilde{f}\cdot\tilde{X})\,\tilde{X}\big)\circ\phi\\
&= D\phi\cdot\Big(f^2\nabla^g_X X + f(Df\cdot X)\,X\Big)\\
&= D\phi\cdot\nabla^g_{fX}(fX).
\end{aligned}$$

Außerhalb von Nullstellen ist jedes Vektorfeld von der Form fX mit $\|X\|_g = 1$, und in Nullstellen sind beide Seiten der Behauptung Null. Damit ist der Satz insgesamt bewiesen. $\square$

Ein einfacherer Weg zu Satz 10.5 geht über die Formel

$$\begin{aligned}
(10.7)\qquad 2g(\nabla_X Y,Z) &= \partial_X\big(g(Y,Z)\big) + \partial_Y\big(g(X,Z)\big) - \partial_Z\big(g(X,Y)\big)\\
&\quad + g([X,Y],Z) - g([Y,Z],X) - g([X,Z],Y).
\end{aligned}$$

Wir wollten die geodätische Krümmung in den Mittelpunkt stellen, deren Invarianz als Euler-Lagrange Operator der g-Bogenlänge anschaulich einsichtig ist.

11 Der Satz von Gauß-Bonnet

In diesem Abschnitt beweisen wir den Satz von Gauß-Bonnet auf Riemannschen Gebieten D. Wir geben einen Ausblick auf den Fall wenn D eine kompakte Fläche mit Rand im $\mathbb{R}^3$ ist, bzw. abstrakter eine zweidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand. Wir beginnen mit dem Spezialfall konformer Metriken, weil die Herleitung dann direkt ist.

Beispiel 11.1 Für die Gaußkrümmung K einer regulären C^2-Fläche hatten wir im Theorem egregium die Formel

$$K = \frac{\sum_{\lambda=1}^2 g_{\lambda 1}\Big(\partial_1\Gamma_{22}^\lambda - \partial_2\Gamma_{12}^\lambda + \sum_{\mu=1}^2(\Gamma_{1\mu}^\lambda\Gamma_{22}^\mu - \Gamma_{2\mu}^\lambda\Gamma_{12}^\mu)\Big)}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Es ist naheliegend, die Krümmung K_g für ein Riemannsches Gebiet durch die rechte Seite zu *definieren*, wobei die Christoffelsymbole durch Formel (9.2) von Levi-Civita gegeben sind. Im Fall einer konformen Metrik $g_{ij} = e^{2u}\delta_{ij}$ folgt dann, wie in Gleichung (9.10) berechnet,

$$K_g = -e^{-2u}\Delta u.$$

Ist U beschränktes Gebiet mit C^2-Rand, so gilt weiter die geodätische Krümmung nach Beispiel 10.1

$$\varkappa_g = e^{-u}\big(\varkappa - \frac{\partial u}{\partial \nu}\big).$$

Wir verwenden hier die inneren Normalen ν bzw. ν_g. Mit $dA_g = e^{2u}\, dA$ und $ds_g = e^u\, ds$ berechnen wir nun mit dem Integralsatz von Gauß

$$\begin{aligned}\int_U K_g\, dA_g + \int_{\partial U} \varkappa_g\, ds_g &= -\int_U \Delta u\, dA - \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, ds + \int_{\partial U} \varkappa\, ds \\ &= \int_{\partial U} \varkappa\, ds.\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis ist bemerkenswert, denn die rechte Seite hängt gar nicht von dem Konformfaktor u ab. Die linke Seite ist also für alle konformen Metriken auf U gleich. Um diese Invariante zu bestimmen, beachten wir folgendes: der Rand ∂U besteht aus geschlossenen Kurven $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$. Jedes Γ_i berandet ein Innengebiet U_i, und es gilt nach Umnummerierung

$$U = U_0 \backslash \bigcup_{i=1}^{r} \overline{U_i} \quad \text{wobei } \overline{U_i} \subset U_0 \text{ und } \overline{U_i} \cap \overline{U_j} = \emptyset.$$

Dies folgt mit etwas Überlegung aus dem Jordanschen Kurvensatz. Nun besagt Satz 4.2, der Umlaufsatz von Hopf und die dort anschließende Bemerkung

$$\int_{\Gamma_0} \varkappa\, ds = 2\pi \quad \text{sowie} \quad \int_{\Gamma_i} \varkappa\, ds = -2\pi \text{ für } i = 1, \ldots, r.$$

Hier ist $\varkappa$ die Krümmung bezüglich der inneren Normale von U, auf den Komponenten Γ_i, $i = 1, \ldots, r$, ist das die äußere Normale zu den U_i. Insgesamt folgt

$$\int_U K_g\, dA_g + \int_{\partial U} \varkappa_g\, ds_g = 2\pi(1-r) = 2\pi\chi(U).$$

Die Zahl $\chi(U) = 2 - \#\partial U$, wobei $\#\partial U$ die Zahl der Randkomponenten ist, heißt Eulercharakteristik von U. Zum Beispiel gilt $\chi(D) = 1$ für eine Kreisscheibe und $\chi(A) = 0$ für einen Annulus. Wir sehen, dass die Summe der Integrale auf der linken Seite nicht nur unabhängig von u ist, also von der konformen Metrik, sondern sogar weitgehend auch von dem Gebiet U. Genauer hängt sie nur von der topologischen Gestalt ab, nämlich der Anzahl der Randkomponenten.

Wir können diese Überlegungen noch verallgemeinern auf Gebiete U mit

Ecken, vergleiche Serie 6, Aufgabe 2. Wie dort bewiesen gilt der Umlaufsatz von Hopf dann mit folgendem Korrekturterm:

$$\int_{\partial U} \varkappa \, ds + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 2\pi\chi(U).$$

Dabei sind die $\alpha_i \in (-\pi, \pi)$ die orientierten Außenwinkel in den Ecken. Da die Metrik $g_{ij} = e^{2u}\delta_{ij}$ dieselben Winkel hat wie die Euklidische, können wir die α_i auch als Riemannsche Außenwinkel betrachten, das heißt bezüglich g. Der Integralsatz von Gauß gilt auch für Gebiete mit Ecken, also bekommen wir

$$\int_U K_g \, dA_g + \int_{\partial U} \varkappa_g \, ds_g + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^g = 2\pi\chi(U).$$

Das ist zum Beispiel auf ein Großkreisdreieck D auf der Sphäre anwendbar, da diese per stereographischer Projektion einem konformen Riemannschen Gebiet entspricht (bis auf einen Punkt). Wir sehen dann, wenn $\omega_i = \pi - \alpha_i$ die Innenwinkel sind.

$$\sum_{i=1}^{3} \omega_i = 3\pi - \sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 3\pi - (2\pi - A(D)) = \pi + A(D).$$

Die Winkelsumme im sphärischen Dreieck ist also stets größer als π, der Unterschied ist durch den Flächeninhalt gegeben.

Um den Fall einer beliebigen Riemannschen Metrik auf den konformen Fall zu reduzieren, braucht man die Theorie elliptischer Differentialgleichungen, vgl. Satz 6.2. In dieser Vorlesung wird das nicht behandelt, wir geben stattdessen einen unabhängigen Beweis. Dazu betrachten wir eine geometrisch motivierte Differentialform, die Zusammenhangsform.

Wir fassen kurz ein paar Fakten zu Differentialformen zusammen. Eine 1-Form auf $U \subset \mathbb{R}^2$ hat die Form $\omega = \omega_1 \, dx^1 + \omega_2 \, dx^2$ mit Funktionen $\omega_i : U \to \mathbb{R}$, ihr Integral längs einer Kurve $\gamma \in C^1(I, U)$ ist

$$\int_\gamma \omega = \int_I \langle \omega \circ \gamma, \gamma' \rangle = \int_I \big(\omega_1(\gamma(t))\, \gamma_1'(t) + \omega_2(\gamma(t))\, \gamma_2'(t)\big)\, dt.$$

Das Integral ist invariant unter richtungstreuen Umparametrisierungen. Deshalb kann ω auch längs des Randes ∂D eines Gebiets $D \subset\subset U$ integriert werden: man parametrisiert die einzelnen Randkurven und addiert. Zum Durchlaufungssinn wird vereinbart, dass γ', $\nu \circ \gamma$ positiv orientiert sind, wobei ν die innere Normale ist, D liegt also in Fahrtrichtung links.

Definition 11.1 *Bezeichne mit $dx^1 \wedge dx^2$ die Bilinearform*

$$(dx^1 \wedge dx^2)(v, w) = \det(v, w) \quad (v, w \in \mathbb{R}^2).$$

Eine Funktion $\phi = f \, dx^1 \wedge dx^2$ mit $f : U \to \mathbb{R}$ heißt 2-Form. Das Integral auf $D \subset\subset U$ ist definiert durch

$$\int_D \phi = \int_D f(x) \, dx.$$

Definition 11.2 *Die äussere Ableitung von $\omega = \omega_1\,dx^1 + \omega_2\,dx^2$ ist die 2-Form*

$$d\omega = \Big(\frac{\partial\omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\omega_1}{\partial x_2}\Big)\,dx^1 \wedge dx^2.$$

Satz 11.1 (Stokes) *Sei ω eine 1-Form auf U mit Koeffizienten $\omega_i \in C^1(U)$. Ist $D \subset\subset U$ Gebiet mit C^1-Rand, so gilt*

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega.$$

Beweis: Wir betrachten das Vektorfeld $X = (-\omega_2, \omega_1)$, also nach Definition

$$d\omega = -\mathrm{div}\,X\,dx^1 \wedge dx^2.$$

Es folgt mit Gauß, wenn ν die innere Normale auf ∂D bezeichnet,

$$\int_D d\omega = -\int_D \mathrm{div}\,X\,dx = \int_{\partial D} \langle X, \nu\rangle\,ds.$$

Ist $\gamma : I \to \partial D$ mit $|\gamma'| = 1$ und γ', $\nu \circ \gamma$ positiv orientiert, so gilt

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \omega &= \int_I \big(\omega_1 \circ \gamma\,\gamma_1' + \omega_2 \circ \gamma\,\gamma_2'\big)\,ds\\
&= \int_I \big(X_2 \circ \gamma\,\gamma_1' - X_1 \circ \gamma\,\gamma_2'\big)\,ds\\
&= \int_I \langle X \circ \gamma, (-\gamma_2', \gamma_1')\rangle\,ds\\
&= \int_I \langle X \circ \gamma, \nu\rangle\,ds.
\end{aligned}$$

Das zeigt $\int_{\partial D} \langle X, \nu\rangle\,ds = \int_{\partial D} \omega$, und der Satz ist bewiesen. □

Als nächstes brauchen wir eine Formel aus der Linearen Algebra.

Lemma 11.1 (90°-Drehung) *Sei $(g_{ij}) \in C^k(U, \mathbb{R}^{2\times 2})$ Riemannsche Metrik auf $U \subset \mathbb{R}^2$. Dann gibt es genau eine Abbildung $J_g \in C^k(U, \mathbb{R}^{2\times 2})$, so dass für alle $v \in \mathbb{R}^2$ gilt:*

(1) $g(J_g v, v) = 0$,

(2) $g(J_g v, J_g v) = g(v, v)$,

(3) $\det(v, J_g v) > 0$ *falls* $v \neq 0$.

Beweis: Falls J_g die Eigenschaften (1),(2) und (3) hat, so gilt

$$0 = g(J_g v, v) = \langle G J_g v, v\rangle_{\mathbb{R}^2} \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^2.$$

Also ist GJ_g schiefsymmetrisch, das heißt

$$GJ_g = \lambda \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda : U \to \mathbb{R}.$$

Insbesondere ist $\det J_g \geq 0$. Aus (2) folgt mittels Polarisation für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$

$$\langle G J_g v, J_g w\rangle = g(J_g v, J_g w) = g(v,w) = \langle Gv, w\rangle.$$

Das bedeutet $J_g^{\mathrm{T}} G J_g = G$, insbesondere $\det J_g = 1$. Es folgt weiter

$$J_g = \pm\sqrt{\det G}\, G^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{\det G}} \begin{pmatrix} -g_{12} & -g_{22} \\ g_{11} & g_{12} \end{pmatrix}.$$

Nach (3) ist $0 < \det(e_1, J_g e_1) = \pm g_{11}/\sqrt{\det G}$, also gilt das $+$-Zeichen. Umgekehrt rechnet man nun nach, dass (1), (2) und (3) mit dieser Definition von J_g gelten. Wir berechnen noch zur Information

$$J_g^2 = \frac{1}{\det G} \begin{pmatrix} -g_{12} & -g_{22} \\ g_{11} & g_{12} \end{pmatrix}^2 = -\mathrm{Id}.$$

$\square$

Im Folgenden sei $(g_{ij}) \in C^2(U, \mathbb{R}^{2\times 2})$ Riemannsche Metrik mit 90°-Drehung J_g und Levi-Civita Zusammenhang $\nabla_X Y$. Das folgende Lemma besagt, dass das Endomorphismenfeld J_g parallel ist, also $\nabla J_g = 0$.

Lemma 11.2 *Für Vektorfelder $X, Y \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$ gilt $\nabla_X(J_g Y) = J_g \nabla_X Y$.*

Beweis: Wir berechnen mit der Produktregel

$$\begin{aligned} g(\nabla_X(J_g Y), Y) &= D_X \underbrace{g(J_g Y, Y)}_{=0} - g(J_g Y, \nabla_X Y) = g(J_g \nabla_X Y, Y), \\ g(\nabla_X(J_g Y), J_g Y) &= \frac{1}{2} D_X \underbrace{g(J_g Y, J_g Y)}_{=g(Y,Y)} = g(\nabla_X Y, Y) = g(J_g \nabla_X Y, J_g Y). \end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung wenn $Y \neq 0$. Ist $Y(x) = 0$, so berechne im Punkt x

$$\nabla_X(J_g Y) = D_X(J_g Y) + \underbrace{\Gamma(X, J_g Y)}_{=0} = J_g(D_X Y + \underbrace{\Gamma(X,Y)}_{=0}) = J_g \nabla_X Y.$$

$\square$

Wir kommen nun zu unserem eigentlichen Problem zurück.

Definition 11.3 (Zusammenhangsform) *Sei $(g_{ij}) \in C^1(U, \mathbb{R}^{2\times 2})$ Riemannsche Metrik auf $U \subset \mathbb{R}^2$. Ist $v \in C^2(U, \mathbb{R}^2)$ ein Einheitsvektorfeld, also $\|v\|_g = \sqrt{g(v,v)} = 1$ auf U, so definieren wir die Zusammenhangsform bezüglich v durch*

$$\omega^v(X) = g(\nabla_X v, J_g v).$$

Proposition 11.1 *Die Zusammenhangsform ω^v hat folgende Eigenschaften:*

(a) *Sei $\gamma \in C^2(I, U)$ mit $\|\gamma'\|_g = 1$ gegeben. Wähle $\theta \in C^1(I)$ mit $v \circ \gamma = \cos\theta\, \gamma' + \sin\theta\, J_g\gamma'$, siehe Satz 3.1. Dann folgt bezüglich der Normalen $J_g\gamma'$*

$$\omega^v(\gamma') = \theta' + \varkappa_g. \tag{11.1}$$

(b) *Die äußere Ableitung der Zusammenhangsform ist*

$$d\omega^v = -K_g \sqrt{\det G}\, dx^1 \wedge dx^2. \tag{11.2}$$

Beweis: Um (11.1) zu zeigen, berechnen wir die Ableitung

$$\nabla_{\gamma'} v = \theta' \,(-\sin\theta\,\gamma' + \cos\theta\, J_g\gamma') + \cos\theta\, \varkappa_g J_g\gamma' - \sin\theta\, \varkappa_g \gamma'.$$

Skalarmultiplikation mit $J_g v = \cos\theta\, J_g\gamma' - \sin\theta\,\gamma'$ ergibt wegen $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$$\omega^v(\gamma') = \theta' + \varkappa_g.$$

Auch (11.2) folgt durch Rechnung, die aber länger ist. Wir beginnen mit

$$\begin{aligned}
\partial_1\omega^v_2 - \partial_2\omega^v_1 &= \partial_1 g(\nabla_2 v, J_g v) - \partial_2 g(\nabla_1 v, J_g v) \\
&= g(\nabla_1\nabla_2 v - \nabla_2\nabla_1 v, J_g v) + g(\nabla_2 v, J_g \nabla_1 v) - g(\nabla_1 v, J_g \nabla_2 v).
\end{aligned}$$

Dabei wurde Lemma 11.2 benutzt. Da $0 = \frac{1}{2}\partial_i\, g(v,v) = g(\nabla_i v, v)$, sind $\nabla_1 v$, $\nabla_2 v$ linear abhängig. Deshalb folgt

$$\partial_1\omega^v_2 - \partial_2\omega^v_1 = g(\nabla_1\nabla_2 v - \nabla_2\nabla_1 v, J_g v). \tag{11.3}$$

Wir brauchen nun zwei Tatsachen. Die erste besagt

$$(\nabla_1\nabla_2 - \nabla_2\nabla_1)(\varphi X) = \varphi(\nabla_1\nabla_2 - \nabla_2\nabla_1)X \quad \text{für } \varphi \in C^2(U). \tag{11.4}$$

Um das zu zeigen, berechnen wir mit den Regeln für ∇

$$(\nabla_1\nabla_2)(\varphi X) = \nabla_1\big(\varphi\nabla_2 X + (\partial_2\varphi)X\big) = \varphi\nabla_1\nabla_2 X + (\partial_1\varphi)\nabla_2 X + (\partial_2\varphi)\nabla_1 X + (\partial^2_{12}\varphi)X.$$

Bei Vertauschen von ∇_1, ∇_2 und Subtraktion fallen die hinteren Terme weg, und (11.4) folgt. Die zweite benötigte Formel ist

$$g\big((\nabla_1\nabla_2 - \nabla_2\nabla_1)X, Y\big) + g\big(X, (\nabla_1\nabla_2 - \nabla_2\nabla_1)Y\big) = 0. \tag{11.5}$$

Dazu verwenden wir wieder die Regeln für ∇, und zwar ist

$$g(\nabla_1\nabla_2 X, X) = \partial_1 g(\nabla_2 X, X) - g(\nabla_2 X, \nabla_1 X) = \frac{1}{2}\partial_1\partial_2\, g(X,X) - g(\nabla_1 X, \nabla_2 X).$$

Vertauschen von ∇_1, ∇_2 und Subtraktion ergibt (11.5) im Fall $X = Y$, und daraus folgt die allgemeine Version für X, Y beliebig durch Polarisierung.

Als nächstes berechnen wir

$$\begin{aligned}
\nabla_1\nabla_2 e_2 &= \nabla_1\Big(\sum_{j=1}^2 \Gamma^j_{22} e_j\Big) = \sum_{k=1}^2 \Big(\partial_1\Gamma^k_{22} + \sum_{j=1}^2 \Gamma^k_{1j}\Gamma^j_{22}\Big)\, e_k, \\
\nabla_2\nabla_1 e_2 &= \nabla_2\Big(\sum_{j=1}^2 \Gamma^j_{12} e_j\Big) = \sum_{k=1}^2 \Big(\partial_2\Gamma^k_{12} + \sum_{j=1}^2 \Gamma^k_{2j}\Gamma^j_{12}\Big)\, e_k,
\end{aligned}$$

Es ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} g\big((\nabla_1\nabla_2 - \nabla_2\nabla_1)e_2, e_1\big) &= \sum_{k=1}^{2} g_{k1}\Big(\partial_1\Gamma_{22}^k - \partial_2\Gamma_{12}^k + \sum_{j=1}^{2}\Gamma_{1j}^k\Gamma_{22}^j - \Gamma_{2j}^k\Gamma_{12}^j\Big) \\ &= K_g\,\det(G). \end{aligned}$$

Hier ist K_g die Gaußsche Krümmung wie im Theorema egregium, siehe Folgerung 9.3. Stellen wir $v, J_g v$ in der Standardbasis dar, so folgt mit (11.4) und (11.5)

$$g\big((\nabla_1\nabla_2 - \nabla_2\nabla_1)v, J_g v\big) = K_g \det(G)\,\big(v^2(J_g v)^1 - v^1(J_g v)^2\big).$$

Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Matrix mit Spalten $v, J_g v$. Da $v, J_g v$ eine Orthonormalbasis bzgl. g ist, gilt

$$A^\top G\, A = E_2, \quad \text{insbesondere } (\det A)^2 = \frac{1}{\det G}.$$

Nun ist $\det A > 0$ nach Definition von J_g, und somit

$$v^1(Jv)^2 - v^2(Jv)^1 = \det A = \frac{1}{\sqrt{\det G}}.$$

Mit (11.3) ergibt sich schließlich

$$\partial_1\omega_2^v - \partial_2\omega_1^v = g(\nabla_1\nabla_2 v - \nabla_2\nabla_1 v, J_g v) = -K_g\sqrt{\det G}.$$

Damit ist Behauptung (11.2) ebenfalls verifiziert. □

Satz 11.2 (Gauß-Bonnet) *Sei $D \subset (U, g)$ beschränktes Gebiet mit zusammenhängendem C^2-Rand. Dann gilt*

$$\int_D K_g\, dA_g + \int_{\partial D} \varkappa_g\, ds_g = 2\pi.$$

Dabei ist $\varkappa_g$ geodätische Krümmung bzgl. der inneren Normale ν längs ∂D.

Beweis: Wir betrachten auf U das Einheitsvektorfeld $v = e_1/\sqrt{g_{11}}$. Sei $\gamma : [0, L] \to \partial D$ Parametrisierung nach der Bogenlänge, mit $\gamma', \nu\circ\gamma$ positiv orientiert. Wir schreiben $v\circ\gamma = \cos\theta\gamma' + \sin\theta J_g\gamma'$ mit $\theta \in C^1([0, L])$. Aus Proposition 11.1 und dem Satz von Stokes folgt

$$\int_D K_g\, dA_g = -\int_D d\omega^v = -\int_{\partial D} \omega^v(\gamma')\, ds_g = -\int_{\partial D} \theta'\, ds_g - \int_{\partial D} \varkappa_g\, ds_g.$$

Aber $\cos\theta(L) = \cos\theta(0)$ und $\sin\theta(L) = \sin\theta(0)$, also folgt

$$\int_D K_g\, dA_g + \int_{\partial D} \varkappa_g\, ds_g \in 2\pi\mathbb{Z}. \tag{11.6}$$

Wir betrachten (11.6) nun für die Schar von Metriken

$$g_{ij}^t = t g_{ij} + (1-t)\delta_{ij} \quad \text{für } t \in [0, 1].$$

Es gibt ein $\lambda > 0$ mit $g(x)(\xi,\xi) \geq \lambda|\xi|^2$ für alle $x \in \overline{D}$, $\xi \in \mathbb{R}^2$, also folgt

$$g^t(x)(\xi,\xi) = tg(x)(\xi,\xi) + (1-t)|\xi|^2 \geq \big(t\lambda + (1-t)\big)\,|\xi|^2 \geq \min(\lambda,1)\,|\xi|^2.$$

Also gilt g^t_{ij}, $(g^t)^{ij} \in C^2(\overline{D}\times[0,1])$. Aus den Koordinatendarstellungen der Terme K_g, $\varkappa_g$, dA_g und ds_g folgt, dass die beiden Integrale in (11.6) stetig von $t \in [0,1]$ abhängen. Aber ihre Summe ist in $2\pi\mathbb{Z}$, somit ist sie konstant für alle $t \in [0,1]$. Mit $t = 0$ folgt aus dem Hopf Umlaufsatz, vgl. Beispiel 11.1,

$$\int_D K_g\,dA_g + \int_{\partial D} \varkappa_g\,ds_g = \int_{\partial D} \varkappa\,ds = 2\pi.$$

□

Wir wollen den Satz von Gauß-Bonnet auf beliebige kompakte Flächen verallgemeinern. Die Strategie ist dabei, die Fläche in Riemannsche Dreiecke zu zerlegen, auf denen jeweils eine Version des Satzes aufgestellt werden kann. Die Gleichungen auf den einzelnen Dreiecken sollen dann summiert werden. Für diesen Zugang brauchen wir eine Version des Satzes für Gebiete mit Ecken. Ein Spezialfall ist die sphärische Trigonometrie, dort werden Dreiecke auf $\mathbb{S}^2$ betrachtet, die durch Großkreisbögen berandet sind. Unsere Behandlung der Ecken ist vom Ansatz hr klar, leider aber etwas technisch.

Definition 11.4 (stückweise C^2-Gebiet) *Ein Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$ hat stückweise C^2-Rand, wenn für jedes $p \in \partial D$ ein $S \in \mathbb{SO}(2)$ und $R = (-\varepsilon,\varepsilon) \times J$ existieren, so dass gilt:*

$$S(D-p) \cap R = \{(x,y) \in R : y > u(x)\}.$$

Dabei soll $u : (-\varepsilon,\varepsilon) \to J$ stetig sein, und C^2 auf $(-\varepsilon,0]$ sowie $[0,\varepsilon)$.

Betrachte erst $u \in C^2((-\varepsilon,\varepsilon))$. Die Einheitstangente des Graphen ist dann

$$\tau(x) = \frac{(1,u'(x))}{\sqrt{1+u'(x)^2}}.$$

Es gilt $\tau(x) = (\cos\theta(x), \sin\theta(x))$ mit der Winkelfunktion

$$\theta : (-\varepsilon,\varepsilon) \to \Big(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big),\ \theta(x) = \arctan u'(x).$$

Sei jetzt $u \in C^2$ nur auf $[-\varepsilon,0]$ und $[0,\varepsilon]$, insbesondere können die Grenzwerte $u'_\pm(0)$ verschieden sein. In diesem Fall sprechen wir von einer Ecke, mit dem Außenwinkel

$$\alpha = \theta_+(0) - \theta_-(0) \in (-\pi,\pi).$$

Der Innenwinkel ergibt sich als $\omega = \pi - \alpha \in (0,2\pi)$. Um den Graph glatt zu ersetzen, wähle zu $\varrho \in (0,\varepsilon)$ eine Abschneidefunktion $\eta \in C^\infty((-\varepsilon,\varepsilon))$ mit $\eta(x) = 1$ für $|x| \geq \frac{\varrho}{2}$ und $\eta(x) = 0$ für $|x| \leq \frac{\varrho}{4}$. Dann ist $u^\varrho(x) = \eta(x)u(x)$ ein C^2-Graph auf $(-\varepsilon,\varepsilon)$. Für die zugehörige Winkelfunktion θ^ϱ folgt mit $\varrho \to 0$

$$\theta^\varrho(\varrho) - \theta^\varrho(-\varrho) \longrightarrow \theta_+(0) - \theta_-(0) = \alpha.$$

Satz 11.3 (Gauß-Bonnet mit Ecken) *$g \in C^2(U, \mathbb{R}^{2\times 2})$ Riemannsche Metrik, und $D \subset\subset U$ sei beschränktes Gebiet mit ∂D zusammenhängend und stückweise C^2. Dann gilt*

$$\int_D K_g \, dA_g + \int_{\partial D} \varkappa_g \, ds_g + \sum_{i=1}^N \alpha_i = 2\pi.$$

Die α_i sind die Außenwinkel in den Ecken p_i für $i = 1, \ldots, N$.

Beweis: Wir verallgemeinern erst den Umlaufsatz auf die Situation mit Ecken. In jedem p_i haben wir (bis auf Translation und Drehung) eine Graphendarstellung $y = u_i(x)$, $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Wir ersetzen $u_i(x)$ auf $[-\varrho, \varrho] \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$ durch $u_i^\varrho(x)$. Dies ergibt ein Gebiet D^ϱ mit C^2-Rand, der zusammenhängend ist. Es folgt aus dem Umlaufsatz, bzw. (4.5) sowie (4.6),

$$\int_{\partial D^\varrho} \varkappa^\varrho(s) \, ds = 2\pi.$$

Bezeichne die Graphen der u_i^ϱ auf $[-\varrho, \varrho]$ mit Γ_i^ϱ. Wegen der Eindeutigkeit der Winkelfunktion bis auf Konstanten gilt wie oben berechnet

$$\int_{\Gamma_i^\varrho} \varkappa^\varrho(s) \, ds = \theta_i^\varrho(\varrho) - \theta_i^\varrho(-\varrho) \longrightarrow \alpha_i.$$

Aber $\partial D^\varrho = \partial D$ bis auf die Graphen Γ_i^ϱ. Da ∂D stückweise C^2 ist, folgt

$$\lim_{\varrho \to 0} \int_{\partial D^\varrho \setminus \bigcup_{i=1}^N \Gamma_i^\varrho} \varkappa^\varrho(s) \, ds = \int_{\partial D} \varkappa(s) \, ds.$$

Kombination der Aussagen ergibt

$$\int_{\partial D} \varkappa \, ds + \sum_{i=1}^N \alpha_i = 2\pi. \tag{11.7}$$

Nun zum Riemannschen Fall. Durch Abschneiden sieht man, dass der Satz von Stokes auch auf einem Gebiet mit stückweise C^2-Rand stimmt. Mit $v = e_1/\sqrt{g_{11}}$ folgt wieder

$$\int_D K_g \, dA_g = -\int_{\partial D} \omega^v(\gamma') \, ds_g. \tag{11.8}$$

Sei $\gamma : [0, L] \to \partial D$ eine Parametrisierung nach der Bogenlänge von ∂D, so dass $J_g \gamma'$ die innere Normale ist. Die singulären Punkte seien

$$\gamma(s_i) = p_i \quad \text{für } 0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_N = L.$$

Nach Satz 3.1 gilt auf jedem Intervall $[s_{i-1}, s_i]$

$$v \circ \gamma = \cos\theta \gamma' + \sin\theta J_g \gamma' \quad \text{mit } \theta \in C^1([s_{i-1}, s_i]) \text{ geeignet.}$$

In einer Ecke $s = s_i$ ist $v(\gamma(s))$ stetig, während die Basis γ', $J_g\gamma'$ um den Außenwinkel α_i dreht. Genauer berechnen wir

$$\begin{aligned}
v(s_i) &= \cos\theta_-(s_i)\,\gamma'_-(s_i) + \sin\theta_-(s_i)\,J_g\,\gamma'_-(s_i)\\
&= \cos\theta_-(s_i)\big(\cos\alpha_i\,\gamma'_+(s_i) - \sin\alpha_i\,J_g\,\gamma'_+(s_i)\big)\\
&\quad + \sin\theta_-(s_i)\big(\sin\alpha_i\,\gamma'_+(s_i) + \cos\alpha_i\,J_g\,\gamma'_+(s_i)\big)\\
&= \big(\cos\theta_-(s_i)\,\cos\alpha_i + \sin\theta_-(s_i)\,\sin\alpha_i\big)\,\gamma'_+(s_i)\\
&\quad + \big(\sin\theta_-(s_i)\,\cos\alpha_i - \cos\theta_-(s_i)\,\sin\alpha_i\big)\,J_g\,\gamma'_+(s_i)\\
&= \cos\big(\theta_-(s_i)-\alpha_i\big)\,\gamma'_+(s_i) + \sin\big(\theta_-(s_i)-\alpha_i\big)\,J_g\,\gamma'_+(s_i).
\end{aligned}$$

In s_i hat θ somit einen Sprung

$$\theta_-(s_i) - \theta_+(s_i) \in \alpha_i + 2\pi\mathbb{Z} \qquad \text{für } i = 0,\ldots,s_N.$$

Dabei wird $\theta_-(0) = \theta_-(L)$, $\theta_+(L) = \theta_+(0)$ gesetzt. Wir berechnen nun mit (11.1)

$$\int_0^L \big(\omega^v(\gamma') - \varkappa_g\big)\,ds_g = \sum_{i=1}^N \int_{s_{i-1}}^{s_i} \theta'(s)\,ds = \sum_{i=1}^N \theta_-(s_i) - \theta_+(s_{i-1}) \in \sum_{i=1}^N \alpha_i + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Durch Kombination folgt

$$\int_D K_g\,dA_g + \int_{\partial D} \varkappa_g\,ds_g + \sum_{i=1}^N \alpha_i \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Jetzt deformiere wieder zur Euklidischen Metrik. Es ist klar, dass sich die Außenwinkel dabei stetig ändern. Der Satz folgt somit aus dem Umlaufsatz mit Ecken.

□

Beispiel 11.2 Für die Innenwinkel in einem Dreieck mit $\varkappa_g \equiv 0$ gilt

$$\sum_{i=1}^3 \omega_i = 3\pi - \sum_{i=1}^3 \alpha_i = \pi + \int_D K_g\,dA_g.$$

Die Summe der Innenwinkel ist also größer bzw. kleiner als im Euklidischen, je nachdem ob die totale Gaußsche Krümmung positiv bzw. negativ ist.

Zum Schluss kommen wir zu einer globalen Fassung des Satzes von Gauß-Bonnet.

Definition 11.5 (Triangulierung) *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine glatte, kompakte Untermannigfaltigkeit mit Rand ∂S, eventuell $\partial S = \emptyset$. Eine kompakte Menge $T \subset S$ heißt Dreieck in S, wenn $T = \phi(\Delta)$ für einen C^2-Diffeomorphismus $\phi : \Delta \to T$, wobei Δ ein Euklidisches Dreieck in $\mathbb{R}^2$ ist. Eine Triangulierung von S ist eine Familie $\mathcal{T} = \{T_\ell : \ell = 1,\ldots,f\}$ von Dreiecken, so dass gilt:*

(a) $\displaystyle\bigcup_{\ell=1}^f T_\ell = S$,

(b) *Für $\ell \neq \ell'$ ist $T_\ell \cap T_{\ell'}$ entweder leer, oder eine Ecke, oder eine Kante.*

Bezeichnet e die Anzahl aller Ecken, k die Anzahl aller Kanten und f die Anzahl aller Flächen der Triangulierung $\mathcal{T}$, so ist die Euler-Charakteristik (auch: Euler-Poincaré-Charakteristik) definiert durch

$$\chi(\mathcal{T}) = e - k + f.$$

Die Existenz einer Triangulierung für eine kompakte Fläche S wurde von T. Radó bewiesen (1925). In der Vorlesung *Einführung in die Differentialgeometrie* (2009) konstruiert B. Ammann eine Triangulierung für Flächen ohne Rand mit Standard-Techniken der Riemannschen Geometrie. Wir werden die Triangulierung ohne Beweis verwenden.

Satz 11.4 (Globaler Gauß-Bonnet) *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ glatte Untermannigfaltigkeit mit Rand ∂S, eventuell $\partial S = \emptyset$. Es sei $\varkappa_g : \partial S \to \mathbb{R}$ die geodätische Krümmung bezüglich der inneren Konormalen ν auf ∂S. Dann gilt*

$$\int_S K\, dA_g + \int_{\partial S} \varkappa_g\, ds = 2\pi\chi(\mathcal{T}),$$

für jede Triangulierung $\mathcal{T}$ von S.

Bemerkung. Die Zahl $\chi(\mathcal{T})$ hängt demnach nicht von der Wahl der Triangulierung ab, wir können auch $\chi(S)$ schreiben. Man kann zeigen, dass $\chi(S)$ sogar eine topologische Invariante ist, das heißt homeomorphe Flächen haben die gleiche Eulercharakteristik. Im Fall $\partial S = \emptyset$ ist jede Fläche homeomorph zu einer Fläche S_g, die aus der Sphäre durch Einsetzen von $g \in \mathbb{N}_0$ Henkeln ensteht. Für diese gilt $\chi(S_g) = 2(1 - g)$.

Beweis (des Satzes): Indem wir zu T_ℓ einen Diffeomorphismus $\phi_\ell : \Delta \to T_\ell$ wählen, erhalten wir auf Δ eine Riemannsche Metrik g_ℓ, und der lokale Satz von Gauß-Bonnet ergibt

$$\int_{T_\ell} K\, dA + \int_{\partial T_\ell} \varkappa_g\, ds = \sum_{\nu=1}^{3} \omega_{\ell,\nu} - \pi.$$

Dabei sind $\omega_{\ell,\nu} \in (0, 2\pi)$ die wohldefinierten Innenwinkel von T_ℓ. Bezeichne nun mit

$$\begin{aligned} e_i &= \#\{\text{innere Ecken}\}, \\ e_r &= \#\{\text{Rand-Ecken}\}, \\ k_i &= \#\{\text{innere Kanten}\}, \\ k_r &= \#\{\text{Rand-Kanten}\}. \end{aligned}$$

Bei Summation über alle Dreiecke heben sich die Integrale von $\varkappa_g$ über die inneren Kanten paarweise weg, da die Normale entgegengesetzt gerichtet ist. Die Innenwinkel addieren sich in einer inneren Ecke zu 2π, in einer Randecke nur zu π. Somit ergibt sich

$$\int_S K\, dA + \int_{\partial\Sigma} \varkappa_g\, ds = 2\pi e_i + \pi e_r - \pi f.$$

Es gelten nun folgende kombinatorischen Regeln:

- $3f = 2k_i + k_r$: zu jedem Dreieck gehören 3 Kanten, wobei die inneren Kanten in jeweils zwei Dreiecken liegen.
- $e_r = k_r$.

Daraus folgt

$$\begin{aligned} e_i + \frac{1}{2}e_r - \frac{1}{2}f &= e_i + e_r + f - \left(\frac{3}{2}f + \frac{1}{2}e_r\right) \\ &= e + f - \big(k_i + \frac{1}{2}k_r + \frac{1}{2}k_r\big) \\ &= e + f - k. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung des Satzes. □

12 Anhang I: Existenz von Kürzesten

Hier betrachten wir nochmals die Bogenlänge für Kurven, und zwar etwas allgemeiner in einem metrischen Raum (M, d). Wir erklären, wie auch in dieser Situation rektifizierbare Kurven nach der Bogenlänge umparametrisiert werden können. Als Hauptresultat beweisen wir die Existenz von kürzesten Verbindungskurven in metrischen Räumen, deren Abstandskugeln kompakt sind.

Definition 12.1 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Abbildung $\gamma \in C^0(I, M)$ heißt stetige Kurve in M. Ist $I = [a, b]$ und gilt $\gamma(a) = \gamma(b)$, so heißt γ geschlossen.*

Sei $Z = (t_0, t_1, \ldots, t_N)$ eine Zerlegung von $I = [a, b]$. Wir setzen

$$L_Z(\gamma) = \sum_{i=1}^{N} d\big(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})\big).$$

In einem normierten Raum mit Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$ ist $L_Z(\gamma)$ die Länge des einbeschriebenen Polygonzugs.

Definition 12.2 *Die Länge einer Kurve $\gamma \in C^0(I, M)$ auf einem Intervall $I = [a, b]$ ist*

$$L(\gamma) := \sup_Z L_Z(\gamma) \in [0, \infty].$$

γ heißt rektifizierbar, falls $L(\gamma) < \infty$.

Aus der Definition der Bogenlänge folgt die Abschätzung

$$d\big(\gamma(t_1), \gamma(t_2)\big) \leq L\big(\gamma|_{[t_1,t_2]}\big). \tag{12.1}$$

Ist $\gamma : [a, b] \to M$ Lipschitzstetig mit Konstante $L < \infty$, so gilt andererseits

$$L(\gamma) \leq L\,(b - a), \tag{12.2}$$

denn für jede Zerlegung Z gilt die Abschätzung

$$L_Z(\gamma) = \sum_{i=1}^{N} d\big(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})\big) \leq L \sum_{i=1}^{N} |t_i - t_{i-1}| = L\,(b - a).$$

Lemma 12.1 *Für $\tau \in I = [a,b]$ und $\gamma \in C^0(I,M)$ gilt*

$$L(\gamma) = L\big(\gamma|_{[a,\tau]}\big) + L\big(\gamma|_{[\tau,b]}\big). \tag{12.3}$$

Beweis: Setze $I_1 = [a,\tau]$ und $I_2 = [\tau,b]$. Sind $Z_{1,2}$ beliebige Zerlegungen von $I_{1,2}$, so ist $Z = (Z_1, Z_2)$ Zerlegung von I und es folgt

$$L_{Z_1}(\gamma|_{I_1}) + L_{Z_2}(\gamma|_{I_2}) = L_Z(\gamma) \leq L(\gamma).$$

Bildung des Supremums über alle $Z_{1,2}$ ergibt

$$L(\gamma|_{I_1}) + L(\gamma|_{I_2}) \leq L(\gamma).$$

Sei umgekehrt $Z = (t_0, \ldots, t_N)$ eine Zerlegung von I. Dann gibt es ein $r \in \{1, \ldots, N\}$ mit $\tau \in [t_{r-1}, t_r]$. Definiere die Zerlegungen $Z_1 = (t_0, \ldots, t_{r-1}, \tau)$ von I_1 und $Z_2 = (\tau, t_r, \ldots, t_N)$ von I_2. Es folgt wegen der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}
L_Z(\gamma) &= \sum_{i=1}^{N} d\big(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})\big) \\
&\leq \sum_{i=1}^{r-1} d\big(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})\big) + d\big(\gamma(\tau), \gamma(t_{r-1})\big) \\
&\quad + d\big(\gamma(t_r), \gamma(\tau)\big) + \sum_{i=r+1}^{N} d\big(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})\big) \\
&\leq L(\gamma|_{I_1}) + L(\gamma|_{I_2}).
\end{aligned}$$

Bildung des Supremums über alle Z liefert $L(\gamma) \leq L(\gamma|_{I_1}) + L(\gamma|_{I_2})$. □

Lemma 12.2 *Sei $\gamma \in C^0(I,M)$. Dann gibt es zu jedem $L < L(\gamma)$ ein $\delta > 0$, so dass für jede Zerlegung Z mit Feinheit $\Delta(Z) < \delta$ gilt:*

$$L < L_Z(\gamma) \leq L(\gamma).$$

Beweis: Die rechte Ungleichung gilt nach Definition von $L(\gamma)$. Wähle zu $L < L(\gamma)$ eine Zerlegung $Z_0 = (s_0, \ldots, s_M)$ mit $L_{Z_0}(\gamma) > L$. Zu $\varepsilon \in (0, L_{Z_0}(\gamma) - L)$ gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$d\big(\gamma(t), \gamma(t')\big) < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{für } |t - t'| < \delta.$$

Sei nun $Z = (t_0, \ldots, t_N)$ eine beliebige Zerlegung mit $\Delta(Z) < \delta$. Die gemeinsame Verfeinerung $Z \cup Z_0$ ergibt sich durch Vereinigung und Anordnung der Unterteilungspunkte von Z, Z_0. Sei m_j die Zahl der Punkte s_i im offenen Intervall (t_{j-1}, t_j), für $1 \leq j \leq N$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
L + \varepsilon &< L_{Z_0}(\gamma) \\
&\leq L_{Z \cup Z_0}(\gamma) \\
&\leq \sum_{j=1}^{N} d\big(\gamma(t_j), \gamma(t_{j-1})\big) + \sum_{j: m_j > 0} (m_j + 1)\, \frac{\varepsilon}{2M} \\
&\leq L_Z(\gamma) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Lemma 12.3 *Ist $\gamma \in C^0(I, M)$ rektifizierbar, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für jedes Intervall $J \subset I$ mit Länge $L(J) < \delta$ gilt:*

$$L(\gamma|_J) < \varepsilon.$$

Beweis: Nach Lemma 12.2 gibt es ein $\delta > 0$, so dass $L(\gamma) - L_Z(\gamma) < \frac{\varepsilon}{2}$ für jede Zerlegung Z mit $\Delta(Z) < \delta$. Wir können außerdem annehmen, dass $d\big(\gamma(t), \gamma(t')\big) < \frac{\varepsilon}{2}$ für $|t - t'| < \delta$. Zu gegebenem Intervall J bestimmen wir eine Zerlegung Z mit $\Delta(Z) < \delta$, für die J eines der Teilintervalle ist. Dann folgt für jede Zerlegung Z' von $J = [\alpha, \beta]$

$$L_{Z'}(\gamma|_J) = L_{Z \cup Z'}(\gamma) - L_Z(\gamma) + d\big(\gamma(\beta), \gamma(\alpha)\big) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\square$

Definition 12.3 $\gamma \in C^0(I, M)$ *heißt längentreu oder nach der Bogenlänge parametrisiert, wenn*

$$L\big(\gamma|_{[s_1,s_2]}\big) = |s_1 - s_2| \quad \textit{für alle } s_1, s_2 \in I.$$

Mit der Abschätzung (12.1) folgt:

$$\gamma \text{ längentreu} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Lip}(\gamma) \leq 1. \tag{12.4}$$

Wir definieren nun für eine beliebige, rektifizierbare Kurve $\gamma : [a, b] \to M$ eine längentreue Umparametrisierung $\tilde{\gamma}$. Dazu betrachten wir die Funktion

$$\ell_\gamma : [a, b] \to [0, L(\gamma)],\ \ell_\gamma(t) = L\big(\gamma|_{[a,t]}\big). \tag{12.5}$$

Aus Lemma 12.1 und Lemma 12.3 folgt, dass die Funktion $\ell_\gamma(t)$ monoton wachsend (im schwachen Sinn), stetig und surjektiv ist. Wir setzen

$$\tilde{\gamma} : [0, L(\gamma)] \to M,\ \tilde{\gamma}(s) := \gamma(t) \quad \text{für } t \in \ell_\gamma^{-1}\{s\}. \tag{12.6}$$

Satz 12.1 (Parametrisierung nach der Bogenlänge) *Die Kurve $\tilde{\gamma}$ in (12.6) ist wohldefiniert und nach der Bogenlänge parametrisiert.*

Beweis: Für $\ell_\gamma(t_{1,2}) = s_{1,2}$ gilt nach (12.1) und Lemma 12.1

$$d\big(\gamma(t_1), \gamma(t_2)\big) \leq L\big(\gamma|_{[t_1,t_2]}\big) = |\ell_\gamma(t_1) - \ell_\gamma(t_2)| = |s_1 - s_2|. \tag{12.7}$$

Also ist γ konstant auf dem Intervall $\ell_\gamma^{-1}\{s\}$, und somit $\tilde{\gamma}$ wohldefiniert. Außerdem ist $\tilde{\gamma}$ Lipschitzstetig mit $\operatorname{Lip}(\tilde{\gamma}) \leq 1$, insbesondere rektifizierbar. Seien nun $s_{1,2} \in [0, L(\gamma)]$ gegeben. Wähle $t_{1,2} \in [a, b]$ mit $\ell_\gamma(t_{1,2}) = s_{1,2}$, und betrachte eine Folge Z_j von Zerlegungen von $[t_1, t_2]$ mit $\Delta(Z_j) \to 0$. Nach Lemma 12.3 folgt $\Delta(\ell_\gamma(Z_j)) \to 0$, und Lemma 12.2 liefert

$$L\big(\tilde{\gamma}|_{[s_1,s_2]}\big) = \lim_{j\to\infty} L_{\ell_\gamma(Z_j)}\big(\tilde{\gamma}|_{[s_1,s_2]}\big) = \lim_{j\to\infty} L_{Z_j}\big(\gamma|_{[t_1,t_2]}\big) = L\big(\gamma|_{[t_1,t_2]}\big) = |s_1 - s_2|.$$

$\square$

Oft ist man an der Existenz von Kürzesten in Homotopieklassen interessiert, und deshalb wollen wir die Parametrisierung nach der Bogenlänge kurz aus diesem Gesichtspunkt betrachten. Wir nehmen $[a,b] = [0,L]$ mit $L = L(\gamma)$ an, andernfalls gehen wir über zu

$$\gamma_L : [0,L] \to M,\ \gamma_L(s) = \gamma\left(a + \frac{s}{L}(b-a)\right).$$

Wir betrachten nun die Funktion

$$\lambda : [0,L] \times [0,1] \to [0,L],\ \lambda(t,u) = (1-u)\,t + u\,\ell_\gamma(t),$$

und definieren weiter

$$h : [0,L] \times [0,1] \to M,\ h(s,u) = \gamma(t) \quad \text{falls } \lambda(t,u) = s.$$

Es ist leicht zu sehen, dass h wohldefiniert ist und folgende Funktionswerte besitzt:

$$\begin{aligned} h(\cdot,0) &= \gamma \quad \text{und} \quad h(\cdot,1) = \tilde{\gamma}, \\ h(0,\cdot) &\equiv \gamma(0) \quad \text{und} \quad h(L,\cdot) \equiv \gamma(L). \end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass h stetig ist, betrachte eine Folge $(s_k,u_k) \to (s,u)$. Da $\lambda(\cdot,u_k)$ surjektiv, gibt es ein $t_k \in [0,L]$ mit $\lambda(t_k,u_k) = s_k$, also nach Definition $h(s_k,u_k) = \gamma(t_k)$. Nach Übergang zu einer Teilfolge gilt $t_k \to t \in [0,L]$, also $\lambda(t,u) = s$ durch Grenzübergang und

$$h(s,u) = \gamma(t) = \lim_{k\to\infty} \gamma(t_k) = \lim_{k\to\infty} h(s_k,u_k).$$

Das übliche Teilfolgenargument impliziert die Stetigkeit. Also gilt:

Lemma 12.4 *Enthält eine Homotopieklasse von Kurven in M eine rektifizierbare Kurve, so enthält sie auch eine längentreue Kurve.*

Satz 12.2 (Unterhalbstetigkeit der Länge) *Konvergieren die Kurven $\gamma_k \in C^0(I,M)$ punktweise gegen $\gamma \in C^0(I,M)$, so gilt*

$$L(\gamma) \leq \liminf_{k\to\infty} L(\gamma_k).$$

Beweis: Für jede Zerlegung Z von $[a,b]$ gilt

$$L_Z(\gamma) = \lim_{k\to\infty} L_Z(\gamma_k) \leq \liminf_{k\to\infty} L(\gamma_k).$$

Durch Bilden des Supremums über Z folgt die Behauptung. □

Für den nachfolgenden Satz verweisen wir auf [**?**]. Statt eines Intervalls $I = [a,b]$ kann man einen beliebigen kompakten metrischen Raum zulassen, aber das wird hier nicht gebraucht.

Satz 12.3 (Arzela-Ascoli) *Sei (M,d) metrischer Raum, $I = [a,b]$ und $\gamma_k \in C^0(I,M)$ habe folgende Eigenschaften:*

(1) *Die Folge γ_k ist gleichgradig stetig.*

(2) *Für jedes $t \in I$ hat die Folge $\gamma_k(t) \in M$ eine konvergente Teilfolge.*

Dann konvergiert eine Teilfolge γ_{k_j} gleichmäßig gegen ein $\gamma \in C^0(I, M)$.

Damit kommen wir zum Hauptresultat des Abschnitts.

Satz 12.4 (Hilbert) *Sei (M, d) ein metrischer Raum, in dem abgeschlossene Abstandskugeln kompakt sind. Sind $p, q \in M$ und gibt es einen rektifizierbaren Weg von p nach q in M, so gibt es auch einen kürzesten Weg von p nach q in M.*

BEWEIS: Sei $\mathcal{C}$ die Menge aller Kurven von p nach q, und $L = \inf_{\gamma \in \mathcal{C}} L(\gamma)$. Ohne Einschränkung sei $p \neq q$, also $L \geq d(p, q) > 0$. Wähle $\gamma_k \in \mathcal{C}$ mit $L_k := L(\gamma_k) \to L$. Nach Satz 12.1 können wir annehmen, dass die γ_k längentreu sind. Um zu einem festen Intervall als Definitionsbereich zu kommen, gehen wir noch über zu

$$\tilde{\gamma}_k : [0, L] \to M,\ \tilde{\gamma}_k(s) = \gamma_k\left(\frac{L_k}{L} s\right).$$

Die $\tilde{\gamma}_k$ sind Lipschitzstetig mit Konstante $L_k/L \to 1$, also gleichgradig stetig. Außerdem gilt

$$d(\tilde{\gamma}_k(s), p) = d(\tilde{\gamma}_k(s), \tilde{\gamma}_k(0)) \leq L(\tilde{\gamma}_k|_{[0,s]}) \leq L_k \to L.$$

Nach Voraussetzung hat $\gamma_k(s)$, für jedes $s \in [0, L]$, eine konvergente Teilfolge. Der Satz von Arzela-Ascoli liefert nun ein $\gamma \in C^0([0, L], M)$ mit $\tilde{\gamma}_k \to \gamma$ gleichmäßig für $k \to \infty$. Es folgt $\gamma \in \mathcal{C}$ und nach Satz 12.2

$$L(\gamma) \leq \liminf_{k \to \infty} L(\tilde{\gamma}_k) = L.$$

Damit ist der Existenzsatz bewiesen. □

Allgemeiner liefert das gegebene Argument die Existenz von Kürzesten in jeder Klasse $\mathcal{C}$ von Kurven, die folgende Eigenschaften hat:

(a) Es gibt rektifizierbare Kurven in $\mathcal{C}$.

(b) $\mathcal{C}$ ist abgeschlossen unter gleichmäßiger Konvergenz.

(c) Es gibt ein Kompaktum $K \subset M$ mit $\gamma(I) \cap K \neq \emptyset$ für alle $\gamma \in \mathcal{C}$.

Diese Bedingungen sind erfüllt, wenn $\mathcal{C}$ eine Homotopieklasse von Verbindungskurven von p nach q in einer abgeschlossenen Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ oder einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ist. Für freie Homtopieklassen gilt Entsprechendes, wenn zum Beispiel M zusätzlich kompakt ist.

13 Krümmung von Raumkurven

Definition 13.1 *Sei $c \in C^2(I, \mathbb{R}^n)$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Die Krümmung von c ist die Funktion*

$$\varkappa : I \to [0, \infty), \quad \varkappa(s) = |c''(s)|.$$

Beispiel 13.1 Die Kurve $c(s) = r(\cos \frac{s}{r}, \sin \frac{s}{r})$ ist Bogenlängenparametrisierung eines Kreises mit Radius $r > 0$. Es gilt

$$\varkappa(s) \equiv \frac{1}{r}.$$

Beispiel 13.2 Für $p, v \in \mathbb{R}^2$ mit $|v| = 1$ beschreibt $c(s) = p + sv$ eine Gerade. Es folgt $\varkappa(s) \equiv 0$.

Beispiel 13.3 Die Schraubenlinie

$$c(t) = (r \cos t, r \sin t, at)$$

ist i.a. nicht nach der Bogenlänge parametrisiert, allerdings ist $|c'(t)| = \sqrt{r^2 + a^2}$ konstant. Wir haben als Bogenlängenfunktion

$$\sigma(t) = \int_0^t |c'(\tau)|\, d\tau = \sqrt{r^2 + a^2}\, t.$$

Mit $L = \sqrt{r^2 + a^2}$ lautet die Bogenlängenparametrisierung $\tilde{c}(s) = (r \cos \frac{s}{L}, r \sin \frac{s}{L}, a \cdot \frac{s}{L})$ und wir erhalten

$$\varkappa(s) = \frac{r}{r^2 + a^2}.$$

Definition 13.2 *Sei $c \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ regulär. Ein System von Funktionen $v_i \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ für $i = 1, \ldots, n$ heißt begleitendes n-Bein längs c, falls gilt:*

$$v_1 = \frac{c'}{|c'|} \quad \textit{und} \quad \langle v_i(t), v_j(t) \rangle = \delta_{ij} \textit{ für alle } t \in I.$$

****

Bild 2.1

****

Lemma 13.1 *Für $v_1, \ldots, v_n \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ und $t_0 \in I$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ *für $1 \leq i, j \leq n$.*

(2) *Es gibt Funktionen $a_{ij} \in C^0(I)$ mit $a_{ji} = -a_{ij}$, so dass gilt:*

$$v_i' = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \quad \textit{für } i = 1, \ldots, n \quad \textit{und} \quad \langle v_i(t_0), v_j(t_0) \rangle = \delta_{ij}.$$

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2): Da $v_1, \ldots, v_n$ Orthonormalbasis, gilt $v_i' = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j$ mit $a_{ij} = \langle v_i', v_j \rangle$, und es folgt

$$a_{ji} = \langle v_j', v_i \rangle = \underbrace{\langle v_j, v_i \rangle}_{=0}' - \langle v_j, v_i' \rangle = -a_{ij}.$$

(2) $\Rightarrow$ (1): Für die Funktionen $g_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$ gilt $g_{ij}(t_0) = \delta_{ij}$ und

$$g'_{ij} = \langle v'_i, v_j\rangle + \langle v_i, v'_j\rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} a_{ik} v_k, v_j\rangle + \langle v_i, \sum_{k=1}^{n} a_{jk} v_k\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\langle v_j, v_k\rangle + \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\langle v_i, v_k\rangle,$$

das heißt

$$g'_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} g_{jk} + \sum_{k=1}^{n} a_{jk} g_{ik}.$$

Die g_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$ sind damit Lösungen eines linearen, homogenen System von n^2 Differentialgleichungen erster Ordnung. Dieses Differentialgleichungssystem wird aber auch durch die konstanten Funktionen δ_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, gelöst:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{jk} + \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\delta_{ik} = a_{ij} + a_{ji} = 0 = \delta'_{ij}.$$

Aus der eindeutigen Lösbarkeit des Anfangswertproblems folgt $\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$. $\square$

Definition 13.3 *Eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $c \in C^2(I, \mathbb{R}^3)$ heißt Frenetkurve, falls $\varkappa(s) \neq 0$ für alle $s \in I$. Das Frenet-Dreibein T, N, B von c ist*

$$\begin{aligned} T &= c' \quad \textit{(Tangentenvektor)} \\ N &= \frac{c''}{|c''|} \quad \textit{(Hauptnormalenvektor)} \\ B &= T \times N \quad \textit{(Binormalenvektor)} \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $\times$ das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$.

Beispiel 13.4 Für die Schraubenlinie ist

$$\begin{aligned} c(s) &= (r\cos\frac{s}{L}, r\sin\frac{s}{L}, a\cdot\frac{s}{L}) \quad \text{mit } L = \sqrt{r^2 + a^2} \\ T(s) &= \frac{1}{L}(-r\sin\frac{s}{L}, r\cos\frac{s}{L}, a) \\ N(s) &= -(\cos\frac{s}{L}, \sin\frac{s}{L}, 0) \\ B(s) &= \frac{1}{L}(a\sin\frac{s}{L}, -a\cos\frac{s}{L}, r) \end{aligned}$$

****

Bild 2.2

****

Definition 13.4 *Sei $c \in C^3(I, \mathbb{R}^3)$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Frenetkurve. Die Torsion von c ist die Funktion*

$$\tau : I \to \mathbb{R}, \quad \tau(s) = \langle N'(s), B(s)\rangle,$$

wobei T, N, B das Frenet-Dreibein von c ist.

Beispiel 13.5 Für die Schraubenlinie ist

$$\tau(s) = \frac{a}{r^2 + a^2}.$$

Lemma 13.2 (Frenetgleichungen) *Sei $c \in C^3(I, \mathbb{R}^3)$ nach der Bogenlänge parametrisierte Frenetkurve mit Frenet-Dreibein T, N, B. Dann gilt*

$$\begin{array}{rcccccc} T' & = & 0 & + & \varkappa N & + & 0 \\ N' & = & -\varkappa N & + & 0 & + & \tau B \\ B' & = & 0 & - & \tau N & + & 0 \end{array}$$

Beweis: Wegen $T = c'$ und $\varkappa = |c''|$ ist $T' = c'' = \varkappa N$, und $\tau = \langle N', B \rangle$ gilt nach Definition 13.4. Da die Matrix nach Lemma 13.1 schiefsymmetrisch sein muss, sind alle Matrixelemente bestimmt. □

Satz 13.1 *Sei $c \in C^2(I, \mathbb{R}^3)$ nach der Bogenlänge parametrisiert.*

(1) *Ist $\varkappa = 0$, so liegt $c(I)$ in einer Geraden.*

(2) *Ist $c \in C^3$ Frenetkurve und $\tau = 0$, so liegt c in einer Ebene.*

Beweis: Ist $\varkappa = 0$, so folgt $c'' = 0$ und somit $c(s) = p + sv$ mit $p, v \in \mathbb{R}^3$, womit (1) gezeigt ist. Unter der Annahme (2) folgt aus den Frenetgleichungen $B' = 0$, also $B(s) \equiv b$ für ein $b \in \mathbb{R}^3$ mit $|b| = 1$. Weiter gilt dann $\langle c, b \rangle' = \langle c', b \rangle \equiv 0$, da $c' = T \perp B$, und hieraus $\langle c, b \rangle = a$ für ein $a \in \mathbb{R}$. Damit verläuft c in der Ebene $\{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x, b \rangle = a\}$. □

Satz 13.2 *Für eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $c \in C^4(I, \mathbb{R}^3)$ mit $\varkappa, \tau \neq 0$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *$c(I)$ liegt in einer Sphäre.*

(2) $\left(\dfrac{\varkappa'}{\varkappa^2 \tau}\right)' - \dfrac{\tau}{\varkappa} = 0.$

Beweis: Für eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve c mit $\varkappa, \tau \neq 0$ und beliebiges $m \in \mathbb{R}^3$ setze $f(s) = \frac{1}{2}|c(s) - m|^2$ und berechne mit den Frenetgleichungen

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f' & = & \langle c - m, T \rangle, \\ f'' & = & \varkappa \langle c - m, N \rangle + 1, \\ f''' & = & \varkappa' \langle c - m, N \rangle - \varkappa^2 \langle c - m, T \rangle + \varkappa\tau \langle c - m, B \rangle. \end{array} \right. \tag{13.1}$$

Liegt nun $c(I)$ auf einer Sphäre mit Mittelpunkt m, so ist $f' = f'' = f''' \equiv 0$. Aus (13.1) folgt dann sukzessive $\langle c - m, T \rangle = 0$, $\langle c - m, N \rangle = -1/\varkappa$ und $\langle c - m, B \rangle = \varkappa'/(\varkappa^2 \tau)$, das heißt

$$m = c + \frac{1}{\varkappa} N - \frac{\varkappa'}{\varkappa^2 \tau} B. \tag{13.2}$$

Andererseits gilt für jede nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve c mit $\varkappa, \tau \neq 0$, wenn m wie in (13.2) definiert ist,

$$m' = \left(\frac{\tau}{\varkappa} - \left(\frac{\varkappa'}{\varkappa^2 \tau} \right)' \right) B. \tag{13.3}$$

Dabei wurden wieder die Frenetgleichungen benutzt. Unter der Annahme (1) ist $m' = 0$ und somit (2) bewiesen. Aus (2) folgt umgekehrt $m' = 0$ mit m wie in (13.2), und weiter $f' = \langle c - m, T\rangle = 0$ nach Definition von m. Also liegt c auf einer Sphäre. $\square$

Satz 13.3 (Hauptsatz für Raumkurven) *Seien $k \in C^1(I), k > 0$, und $\omega \in C^0(I)$ gegebene Funktionen. Dann gibt es eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $c \in C^3(I, \mathbb{R}^3)$ mit Krümmung $\varkappa = k$ und Torsion $\tau = \omega$. Die Kurve c ist eindeutig bestimmt bis auf Anwendung einer orientierungserhaltenden Euklidischen Bewegung.*

Beweis: Wir zeigen zuerst die Eindeutigkeit. Seien $c, \tilde{c} : I \to \mathbb{R}^3$ zwei solche Kurven, mit zugehörigen Frenetbeinen $\{T, N, B\}$ bzw. $\{\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B}\}$. Da die Frenet-Dreibeine positiv orientiert sind, gilt nach einer eigentlichen Bewegung für ein $s_0 \in I$

$$c(s_0) = \tilde{c}(s_0) \quad \text{und} \quad T(s_0), N(s_0), B(s_0) = \tilde{T}(s_0), \tilde{N}(s_0), \tilde{B}(s_0).$$

Sowohl T, N, B als auch $\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B}$ erfüllen die Frenetgleichungen mit den Koeffizienten $\varkappa = k$ und $\tau = \omega$. Aus der eindeutigen Lösbarkeit der Anfangswertproblems folgt $T, N, B = \tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B}$ und hieraus $c = \tilde{c}$ wegen $c' = T$ bzw. $\tilde{c}' = \tilde{T}$.

Sei nun T, N, B eine C^1-Lösung des Frenetsystems mit Koeffizienten $\varkappa = k$ und $\tau = \omega$ zu den Anfangswerten $T(s_0), N(s_0), B(s_0) = e_1, e_2, e_3$. Eine solche Lösung liefert der generelle Existenzsatz für Anfangswertprobleme für gewöhnliche Differentialgleichungen (Stichwort: Picard-Lindelöf). Da die Koeffizientenmatrix in den Frenetgleichungen schiefsymmetrisch ist, ist T, N, B orthonormal für alle $s \in I$ nach Lemma 13.1. Definiere

$$c \in C^2(I, \mathbb{R}^3),\ c(s) = \int_{s_0}^{s} T(s')\, ds'.$$

Wegen $c' = T$ ist c nach der Bogenlänge parametrisiert und es gilt $c'' = T' = kN$. Also ist N die Hauptnormale sowie $k > 0$ die Krümmung von c. Da $k \in C^1$ nach Voraussetzung und $N \in C^1$, folgt weiter $c \in C^3(I, \mathbb{R}^3)$. Nun ist die Orthonormalbasis T, N, B an der Stelle s_0 positiv orientiert und $\det(T, N, B)$ hängt stetig von s ab, also ist B der Binormalenvektor der Kurve c und es folgt $\tau = \langle N', B\rangle = \omega$. $\square$

Die Umparametrisierung nach der Bogenlänge kann in konkreten Fällen oft nicht explizit berechnet werden. Wir wollen deshalb Formeln für die Krümmung und die Torsion herleiten, wenn die Kurve nicht nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

Definition 13.5 *Sei $c \in C^2(I, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre Kurve. Ist $\tilde{c} = c \circ \varphi : \tilde{I} \to \mathbb{R}^3$ richtungstreue Umparametrisierung nach der Bogenlänge, so definieren wir folgende Größen:*

(1) $\varkappa = \tilde{\varkappa} \circ \varphi^{-1}$ *(Krümmung von c),*

(2) $T = \tilde{T} \circ \varphi^{-1}$, $N = \tilde{N} \circ \varphi^{-1}$, $B = \tilde{B} \circ \varphi^{-1}$ *(Frenet-Dreibein längs c für $\varkappa \neq 0$),*

(3) $\tau = \tilde{\tau} \circ \varphi^{-1}$ *(Torsion von c, für $\varkappa \neq 0$ und $c \in C^3$).*

Lemma 13.3 *Die Größen T, N, B sowie $\varkappa, \tau$ in Definition 13.5 sind wohldefiniert, und für beliebige richtungstreue ("+") bzw. richtungsumkehrende ("−") Umparametrisierungen $c_2 = c_1 \circ \varphi$ gelten die Formeln*

$$T_2 = \pm T_1 \circ \varphi, \quad N_2 = N_1 \circ \varphi, \quad B_2 = \pm B_1 \circ \varphi, \tag{13.4}$$

$$\varkappa_2 = \varkappa_1 \circ \varphi \quad \textit{und} \quad \tau_2 = \tau_1 \circ \varphi. \tag{13.5}$$

Beweis: Die Existenz einer richtungstreuen Umparametrisierung nach der Bogenlänge wurde in Satz 12.1 bewiesen. Sind c_1 und $c_2 = c_1 \circ \varphi$ beide nach der Bogenlänge parametrisiert, so gilt $\varphi(s) = \pm s + s_0$, vgl. die Bemerkung zu Satz 12.1, und (13.4) und (13.5) ergeben sich direkt. Sind nun $c_i = c \circ \varphi_i$ für $i = 1, 2$ richtungstreue Umparametrisierungen von c nach der Bogenlänge, so ist $c_2 = c_1 \circ \varphi$ mit $\varphi = \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$ und es folgt zum Beispiel

$$T_2 \circ \varphi_2^{-1} = (T_1 \circ \varphi) \circ \varphi_2^{-1} = T_1 \circ \varphi_1^{-1}.$$

Analog transformieren sich die anderen Größen, womit die Wohldefiniertheit verifiziert ist. Sei schließlich $c_2 = c_1 \circ \varphi$ eine beliebige Umparametrisierung. Wähle dann richtungstreue Umparametrisierungen $\tilde{c}_i = c_i \circ \varphi_i$ nach der Bogenlänge für $i = 1, 2$. Dann ist $\tilde{c}_2 = \tilde{c}_1 \circ \phi$ mit $\phi = \varphi_1^{-1} \circ \varphi \circ \varphi_2$ und folglich $\tilde{T}_2 = \pm \tilde{T}_1 \circ \phi$ bzw.

$$T_2 = \tilde{T}_2 \circ \varphi_2^{-1} = \pm \tilde{T}_1 \circ \varphi_1^{-1} \circ \varphi = \pm T_1 \circ \varphi.$$

Wieder kann für $N, B, \varkappa$ und τ analog argumentiert werden, womit das Lemma bewiesen ist. □

Lemma 13.4 *Für eine reguläre Kurve $c \in C^2(I, \mathbb{R}^3)$ berechnen sich Krümmung, Frenet-Dreibein (für $\varkappa \neq 0$) und Torsion (für $\varkappa \neq 0$, $c \in C^3$) wie folgt:*

$$\varkappa = \frac{\big|c'' - \langle c'', T\rangle T\big|}{|c'|^2} = \frac{\big(|c''|^2 - \langle c'', T\rangle^2\big)^{1/2}}{|c'|^2}, \quad \textit{wobei } T = \frac{c'}{|c'|}, \tag{13.6}$$

$$T = \frac{c'}{|c'|}, \quad N = \frac{c'' - \langle c'', T\rangle T}{|c'' - \langle c'', T\rangle T|}, \quad B = \frac{c' \times c''}{|c'|\,|c'' - \langle c'', T\rangle T|}, \tag{13.7}$$

$$\tau = \frac{\det(c', c'', c''')}{|c'|^2\,|c'' - \langle c'', T\rangle T|}. \tag{13.8}$$

Beweis: Wähle eine richtungstreue Umparametrisierung $\tilde{c} = c \circ \varphi$ nach der Bogenlänge, also

$$1 = |(c \circ \varphi)'(\varphi^{-1}(t))| = |c'(t)| \frac{1}{(\varphi^{-1})'(t)} \quad \text{bzw. } (\varphi^{-1})'(t) = |c'(t)|.$$

Es folgt

$$T(t) = \tilde{c}'(\varphi^{-1}(t)) = \frac{(\tilde{c} \circ \varphi^{-1})'(t)}{(\varphi^{-1})'(t)} = \frac{c'(t)}{|c'(t)|}.$$

Weiter gilt

$$\tilde{T}'(\varphi^{-1}(t)) = \frac{(\tilde{T} \circ \varphi^{-1})'(t)}{(\varphi^{-1})'(t)} = \frac{1}{|c'(t)|} \left(\frac{d}{dt} \frac{c'}{|c'|} \right)(t) = \frac{c''(t) - \langle c''(t), T(t) \rangle \, T(t)}{|c'(t)|^2}.$$

Die Frenetgleichungen liefern jedoch $\tilde{T}'(\varphi^{-1}(t)) = \tilde{\varkappa}(\varphi^{-1}(t)) \tilde{N}(\varphi^{-1}(t)) = \varkappa(t) \, N(t)$, also

$$\varkappa = \frac{|c'' - \langle c'', T \rangle T|}{|c'|^2} = \frac{\big(|c''|^2 - \langle c'', T \rangle^2\big)^{1/2}}{|c'|^2} \qquad \text{und} \qquad N = \frac{c'' - \langle c'', T \rangle T}{|c'' - \langle c'', T \rangle T|}.$$

Damit ergibt sich weiter

$$B = \frac{c' \times c''}{|c'||c'' - \langle c'', T \rangle T|}.$$

Nach Definition der Torsion ist

$$\tau(t)) = \langle \tilde{N}'(\varphi^{-1}(t)), \tilde{B}(\varphi^{-1}(t)) \rangle = \Big\langle \frac{(\tilde{N} \circ \varphi^{-1})'(t)}{(\varphi^{-1})'(t)}, \tilde{T}(\varphi^{-1}(t)) \times \tilde{N}(\varphi^{-1}(t)) \Big\rangle,$$

und schließlich folgt wegen $T' = |c'| \, \tilde{T}' \circ \varphi^{-1} = |c'| \varkappa \, N$

$$\tau = \frac{1}{|c'|} \Big\langle \frac{d}{dt} \frac{c'' - \langle c'', T \rangle T}{|c'' - \langle c'', T \rangle T|}, T \times N \rangle = \frac{\langle c''', T \times N \rangle}{|c'||c'' - \langle c'', T \rangle T|} = \frac{\langle c' \times c'', c''' \rangle}{|c'|^2 \, |c'' - \langle c'', T \rangle T|}.$$

□

Lemma 13.5 *Sei $c \in C^2(I, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre Kurve und $F(x) = Sx + a$ eine Euklidische Bewegung. Dann ist $\tilde{c} = F \circ c$ ebenfalls regulär und es gilt mit* $\det(S) = \pm 1$

(1) $\tilde{\varkappa} = \varkappa$.

(2) $\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B} = ST, SN, \pm SB$.

(3) $\tilde{\tau} = \pm \tau$.

Beweis: Wir können nach Lemma 13.3 annehmen, dass c nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Es gilt $(F \circ c)' = Sc'$ sowie $(F \circ c)'' = Sc''$. Da $S \in \mathbb{O}(\mathbb{R}^3)$, folgt $\tilde{\varkappa} = \varkappa$ sowie $\tilde{T} = ST$. Mit c ist auch $\tilde{c}$ Frenetkurve, und es gilt $\tilde{N} = SN$ sowie

$$\tilde{B} = (ST) \times (SN) = \pm S(T \times N) = \pm SB.$$

Schließlich folgt $\tilde{\tau} = \langle \tilde{N}', \tilde{B} \rangle = \pm \langle SN', SB \rangle = \pm \tau$. □

Als Anwendung wollen wir jetzt eine lokale Entwicklung für die Graphendarstellung einer Kurve herleiten. Nach einer orientierungserhaltenden Isometrie können wir annehmen, dass $c(0) = 0$ und

$$T(0), N(0), B(0) = e_1, e_2, e_3.$$

Es gibt dann lokal eine Umparametrisierung der Form $c(x) = (x, u(x))$ für $x \in (-\delta, \delta)$, wobei $u : (-\delta, \delta) \to \mathrm{Span}\{e_2, e_3\}$ mit $u(0) = 0$ *. Damit gilt

$$c' = (1, u'), \quad c'' = (0, u''), \quad c''' = (0, u'''),$$

und wir erhalten aus unseren Formeln

$$T = \frac{(1, u')}{\sqrt{1 + |u'|^2}} \quad \Rightarrow \quad u'(0) = 0.$$

Weiter berechnen wir

$$\varkappa = \frac{\big((1 + |u'|^2)|u''|^2 - \langle u', u''\rangle^2\big)^{1/2}}{(1 + |u'|^2)^{3/2}},$$

und schließen in $x = 0$

$$\varkappa(0) = |u''(0)| \quad \text{sowie} \quad e_2 = N(0) = \frac{c''(0)}{|c''(0)|} = \frac{u''(0)}{\varkappa(0)}.$$

Außerdem folgt durch Differentiation

$$\varkappa'(0) = \frac{1}{2} \frac{1}{\varkappa(0)}\, 2\langle u''(0), u'''(0)\rangle = \langle u'''(0), e_2\rangle.$$

Schließlich

$$\tau(0) = \frac{\det(e_1, \varkappa(0)e_2, u'''(0))}{\varkappa(0)^2} = \frac{\langle u'''(0), e_3\rangle}{\varkappa(0)}.$$

Daraus ergibt sich für $c(x)$ folgende Taylorentwicklung:

$$c(x) = xe_1 + \frac{x^2}{2}\varkappa(0)\, e_2 + \frac{x^3}{6}\big(\varkappa'(0)\, e_2 + \varkappa(0)\, \tau(0)\, e_3\big) + o(|x|^3).$$

Im Fall $\tau(0) > 0$ sieht die Kurve wie folgt aus:
****

Bild 2.4

*********************************** ***********************************

Bild 2.5

****
Wir wollen nun einen etwas tieferliegenden Satz für Kurven im $\mathbb{R}^3$ besprechen. Grob gesagt geht es um die Frage, wieviel Krümmung gebraucht wird, damit eine Kurve sich schließt.

*Übungsaufgabe

Satz 13.4 (Ungleichung von Fenchel) *Sei $c : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisiert und C^2-geschlossen. Dann gilt*

$$\int_0^L \varkappa(s)\,ds \geq 2\pi.$$

Bei Gleichheit ist c eine ebene, einfach geschlossene Kurve, die ein konvexes Gebiet berandet.

Wir benötigen dazu folgendes Resultat, das auch für sich betrachtet von Interesse ist.
Zwei Punkte p, q auf $\mathbb{S}^2$ mit $0 < \sphericalangle(p, q) < \pi$ spannen eine Ebene auf, die die Sphäre in einem Großkreis schneidet. Durch die Punkte wird der Kreis in zwei Bögen zerlegt. Der kürzere dieser Bögen ist der eindeutig bestimmte Großkreisbogen zwischen p und q mit Länge strikt kleiner als π. Im Fall $\sphericalangle(p, q) = \pi$ gibt es dagegen unendlich viele Meridiane der Länge π, die p und q verbinden.

Beweis: (von Satz **??**) Wir betrachten die stetige Funktion

$$\theta : \mathbb{R}^3 \backslash \{0\} \to [-\pi/2, \pi/2],\ \theta(x) = \arccos\Big\langle \frac{x}{|x|}, e_3 \Big\rangle.$$

Für $x \in S^2 \backslash \{\pm e_3\}$ berechnen wir

$$D\theta(x) = -\frac{e_3 - \langle x, e_3 \rangle x}{\sqrt{1 - \langle x, e_3 \rangle^2}},$$

insbesondere gilt
(13.9)
$|D\theta(x)| = 1$ sowie $\langle D\theta(x), x \rangle = 0,\ \langle D\theta(x), e_3 \rangle < 0$ für alle $x \in S^2 \backslash \{\pm e_3\}$.

****

Bild 2.6

****
Nach Rotation ist o. B. d. A. $\gamma(a) = e_3$. Mit $\varrho = \theta(\gamma(b))$ gelte zunächst zusätzlich

(13.10) $$0 < \theta(\gamma(t)) < \varrho \quad \text{für alle } t \in (a, b).$$

Dann folgt aus der Kettenregel

$$\frac{d}{dt}\,\theta\big(\gamma(t)\big) = \langle D\theta\big(\gamma(t)\big), \gamma'(t) \rangle \quad \text{für alle } t \in (a, b).$$

Wir integrieren von a bis b und schätzen mit Cauchy-Schwarz und (13.9) ab:

$$\sphericalangle(\gamma(a), \gamma(b)) = \varrho = \int_a^b \langle D\theta(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle\,dt \leq \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = L(\gamma).$$

Bei Gleichheit folgt $\gamma'(t) = \lambda(t)\, D\theta\big(\gamma(t)\big)$ mit $\lambda(t) \geq 0$, also $\lambda(t) = |\gamma'(t)|$. Sei nun $\theta_0 \in (0, \varrho)$ beliebig. Dann gibt es ein $t_0 \in (a, b)$ mit $\gamma(t_0) = (\sin\theta_0, 0, \cos\theta_0)$, nach evtl. Drehung um die e_3-Achse. Aus der bewiesenen Abschätzung folgt

$$L(\gamma|_{[a,t_0]}) = L(\gamma) - L(\gamma|_{[t_0,b]}) \leq \varrho - (\varrho - \theta_0) = \theta_0,$$

das heißt $L(\gamma|_{[a,t_0]}) = \theta_0$ und $L(\gamma|_{[t_0,b]}) = \varrho - \theta_0$. Wir betrachten die Funktion

$$\sigma : [a, b] \to [0, \varrho], \quad \sigma(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} |\gamma'(\tau)|\, d\tau.$$

Mit $\tilde{\gamma}(s) = (\sin s, 0, \cos s)$, $s \in (0, \pi)$, gilt $|\tilde{\gamma}'(s)| = 1$, $\langle\tilde{\gamma}'(s), \tilde{\gamma}(s)\rangle = 0$ und $\langle\tilde{\gamma}'(s), e_3\rangle < 0$. Wegen (13.9) und $\tilde{\gamma}'(s), D\theta(\tilde{\gamma}(s)) \in \operatorname{Span}\{e_1, e_3\}$ folgt $\tilde{\gamma}'(s) = D\theta(\tilde{\gamma}(s))$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
(\tilde{\gamma} \circ \sigma)'(t) &= \tilde{\gamma}'\big(\sigma(t)\big)\, \sigma'(t) = \lambda(t)\, D\theta\big((\tilde{\gamma} \circ \sigma)(t)\big), \\
(\tilde{\gamma} \circ \sigma)(t_0) &= (\sin\theta_0, 0, \cos\theta_0) = \gamma(t_0).
\end{aligned}$$

Aus dem Eindeutigkeitssatz für das Anfangswertproblem folgt $\gamma(t) = \widetilde{\gamma}\big(\sigma(t)\big)$ für $t \in [a, b]$, womit die zweite Aussage gezeigt ist.

Ohne die Annahme (13.10) betrachten wir ein maximales Intervall $[t_1, t_2] \subset [a, b]$ mit $0 < \theta\big(\gamma(t)\big) < \varrho$ für alle $t \in (t_1, t_2)$. Die Aussagen folgen dann zunächst für $\gamma|_{[t_1,t_2]}$, insbesondere ist $L(\gamma) \geq L(\gamma|_{[t_1,t_2]}) \geq \varrho$. Im Gleichheitsfall muss γ auf $[a, t_1]$ bzw. $[t_2, b]$ konstant sein. Damit ist der Satz bewiesen. $\square$

Lemma 13.6 *Sei $\gamma : I = [a, b] \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine geschlossene, stückweise C^1-Kurve mit Länge $L(\gamma) \leq 2\pi$* (bzw. sogar $L(\gamma) < 2\pi$). *Dann liegt γ komplett in einer Halbsphäre, das heißt es gibt ein $e \in \mathbb{S}^2$ mit $\langle\gamma(t), e\rangle \geq 0$* (bzw. sogar $\langle\gamma(t), e\rangle > 0$) *für alle $t \in [a, b]$.*

Beweis: Wähle ein $\tau \in (a, b)$ mit $L(\gamma|_{[a,\tau]}) = L(\gamma|_{[\tau,b]}) = L(\gamma)/2$, und setze $p = \gamma(a)$, $q = \gamma(\tau)$. Ist $\sphericalangle(p, q) = \pi$, so gilt $L(\gamma) = 2\pi$ nach Satz **??** und $\gamma|_{[a,\tau]}$ bzw. $\gamma|_{[\tau,b]}$ parametrisieren Halb-Großkreise von p nach q. Man kann dann für e eine der Normalen der zugehörigen Ebenen wählen.

****

Bild 2.7

****

Ab jetzt sei $\sphericalangle(p, q) < \pi$. Wähle für e den Mittelpunkt des kürzeren Großkreisbogens von p nach q. Nach Drehung können wir annehmen, dass $e = e_3$ und somit $(q^1, q^2, q^3) = (-p^1, -p^2, p^3)$, wobei $p^3 > 0$. Nun ist entweder $\langle\gamma(t), e_3\rangle > 0$ für $0 \leq t \leq \tau$, oder es gibt ein $t_0 \in (a, \tau)$ mit

$$\langle\gamma(t_0), e_3\rangle = 0.$$

Im zweiten Fall betrachten wir mit $S(x^1, x^2, x^3) = (x^1, x^2, -x^3)$ die Kurve

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{für } a \leq t \leq t_0 \\ S\gamma(t) & \text{für } t_0 \leq t \leq \tau. \end{cases}$$

****

Bild 2.8

****

$\tilde{\gamma}$ ist stückweise C^1 und verbindet p mit $S(q) = -p$, also folgt aus Satz **??**

$$L(\gamma) = 2L(\gamma|_{[a,\tau]}) = 2L(\tilde{\gamma}) \geq 2\pi.$$

Außerdem liefert die Gleichheitsdiskussion von Satz **??**, dass $\tilde{\gamma}$ einen Halb-Großkreis von p nach $S(q) = -p$ durchläuft. Es folgt

$$\langle \tilde{\gamma}(t), e_3 \rangle \geq 0 \text{ für } t \in [a, t_0] \quad \text{sowie} \quad \langle \tilde{\gamma}(t), e_3 \rangle \leq 0 \text{ für } t \in [t_0, b],$$

und hieraus $\langle \gamma(t), e_3 \rangle \geq 0$ für alle $t \in [a, \tau]$. Da wir für $\gamma|_{[\tau,b]}$ analog argumentieren können, ist das Lemma gezeigt. □

Beweis: (der Fenchel-Ungleichung)
Sei $c : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ C^2-geschlossen mit $|c'| = 1$. Dann ist

$$\gamma : [0, L] \to S^2 \subset \mathbb{R}^3, \quad \gamma(s) = c'(s)$$

geschlossene C^1-Kurve. Für $e \in S^2$ gilt

$$\int_0^L \langle \gamma(s), e \rangle \, ds = \int_0^L \frac{d}{ds} \langle c(s), e \rangle \, ds = \big[\langle c(s), e \rangle\big]_{s=0}^{s=L} = 0. \tag{13.11}$$

Also gibt es kein $e \in S^2$ mit $\langle \gamma(s), e \rangle > 0$ für alle s, und nach Lemma 13.6 folgt

$$\int_0^L \varkappa(s) \, ds = \int_0^L |\gamma'(s)| \, ds = L(\gamma) \geq 2\pi.$$

Wenn in dieser Abschätzung Gleichheit eintritt, so wählen wir mit Lemma 13.6 ein $e \in S^2$ mit $\langle \gamma(s), e \rangle \geq 0$ für alle $s \in [0, L]$. Aber dann folgt wegen (13.11)

$$\frac{d}{ds} \langle c(s), e \rangle = \langle \gamma(s), e \rangle \equiv 0,$$

und $c(I)$ liegt in einer Ebene $\langle x, e \rangle = \text{const}$. Jetzt zeigen wir, dass c einfach geschlossen ist. Angenommen es gibt $\tau \in (0, L)$ mit $c(\tau) = c(0)$. Wäre $L(\gamma|_{[0,\tau]}) \leq \pi$, so wählen wir $\sigma \in (0, \tau)$ mit $L(\gamma|_{[0,\sigma]}) = L(\gamma|_{[\sigma,\tau]}) \leq \frac{\pi}{2}$, und schließen für $e = \gamma(\sigma)$ mit Satz **??**

$$\langle \gamma(s), e \rangle \geq 0 \quad \text{für alle } s \in [0, \tau].$$

Andererseits gilt

$$\int_0^\tau \langle \gamma(s), e \rangle \, ds = \big[\langle c(s), e \rangle\big]_{s=0}^{s=\tau} = 0,$$

also $\langle\gamma(s), e\rangle \equiv 0$. Aber $\{x \in S^1 : \langle x, e\rangle = 0\}$ besteht nur aus zwei Punkten und γ ist stetig. Damit ist γ konstant auf $[0, \tau]$ und $c(0) \neq c(\tau)$, ein Widerspruch. Wir folgern

$$L(\gamma) = L(\gamma|_{[0,\tau]}) + L(\gamma|_{[\tau,b]}) > \pi + \pi = 2\pi,$$

im Widerspruch zur Annahme. Also ist im Gleichheitsfall c eine einfach geschlossenene, ebene Kurve. Die verbleibende Behauptung, dass c ein konvexes Gebiet berandet, werden wir im nächsten Kapitel beweisen. $\square$