Aufgabe 1 *(4 Punkte)*
Beweisen Sie Lemma 7.1 aus der Vorlesung: Es gelte die Defintion $\Omega_T := B_1^n(0) \times (0,T)$. Sei $f, g \in H^{0,\alpha}(\Omega_T)$, dann gilt

$$f \cdot g \in H^{0,\alpha}(\Omega_T)$$

und

$$\|f \cdot g\|_{H^{0,\alpha}(\Omega_T)} \leq c(n,\alpha)\|f\|_{H^{0,\alpha}(\Omega_T)}\|g\|_{H^{0,\alpha}(\Omega_T)}.$$

Aufgabe 2 *(6 Punkte)*
Sei wieder $\Omega_T := B_1^n(0) \times (0,T)$ definiert für $T < \infty$.
Es seien $f \in H^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega_T}\right)$, $c, b^k, a^{ij} \in H^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega_T}\right)$ für $k,i,j \in \{1,...,n\}$ gegeben. Es sei $\left(a^{ij}\right)_{i,j=1,\ldots,n}$ symmetrisch und positiv definit. Sei $u : B_1^n(0) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $u \in H^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega_T}\right)$ $\forall T < \infty$, eine Lösung von

$$\begin{cases} \dot{u} = a^{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + b^k \frac{\partial u}{\partial x^k} + cu + f \quad \text{in } \Omega_T, \\ u(\cdot,t)\big|_{\partial B_1^n(0)} = 0 \quad \text{für alle } t \in [0,T], \\ u(\cdot,0) = 0 \quad \text{in } B_1^n(0). \end{cases}$$

Zeigen Sie mit den Bezeichungen $c_T := \sup_{\Omega_T} |f| < \infty$ und $\tilde{c}_T := \sup_{\Omega_T} |c| < \infty$

$$\|u\|_{C^0(\Omega_T)} \leq c(n,\tilde{c}_T,T)(1 + Tc_T).$$

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, den 18.01.2011, bis 8.15 Uhr.