Aufgabe 1 *(4 Punkte)*
Sei $f : \mathbb{R}_0^+ \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben mit $f \in H^{0,\alpha}\left(\mathbb{R}_0^+ \times [0,\infty)\right)$ und $f(0,t) = 0\ \forall t \in [0,\infty)$. Die Lösung u zu

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = u_{xx} + f, & \text{in } (0,\infty)\times(0,\infty), \\ u(\cdot,0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+, \\ u(0,t) = 0 \quad \forall t \in [0,\infty), \end{cases}$$

die in der Vorlesung konstruiert wurde, ist

$$u(x,t) := \int_0^t \int_0^\infty \big(\Gamma(x-y,t-s) - \Gamma(x+y,t-s)\big) f(y,s)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s.$$

mit $\Gamma(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ für $x \in \mathbb{R},\ t > 0$.
Geben Sie ein f an, so dass $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) \neq 0$ gilt für ein $t > 0$.

Aufgabe 2 *(4 Punkte)*
Sei $T < \infty$. Es sei wieder $\Omega_T := B_1^n(0) \times (0,T)$ definiert. Sei $u \in H^{2,\alpha}(\Omega_T)$. Zeigen Sie: Für alle $\epsilon > 0$ existiert eine Konstante $c = c(n,\epsilon,T) > 0$ mit

$$\|u\|_{C^1(\Omega_T)} \leq \epsilon \|u\|_{H^{2,\alpha}(\Omega_T)} + c(n,\epsilon,T)\|u\|_{C^0(\Omega_T)} \quad \forall k = 1,...,n.$$

Aufgabe 3 *(4 Punkte)*
Beweisen Sie Theorem 7.3 aus der Vorlesung, ohne Lemma 7.2 zu benutzen. Stattdessen dürfen Sie annehmen, dass

$$\|b^k\|_{C^0(\Omega_T)} \leq \hat{\epsilon}(n,\alpha,T) \quad \forall k = 1,...,n$$

gilt für $\hat{\epsilon}(n,\alpha,T)$ klein genug.
Hinweis: Aufgabe 2.

Bemerkung: Bitte benutzen Sie folgende (von der Vorlesung abweichende) Definition:
$H^{k,\alpha}(\Omega \times (0,T)) := \{u \in H^k(\Omega \times (0,T)) | \left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^s (D^p u)\right]_{H^\alpha(\Omega\times(0,T))} < \infty$
$\forall s \in \mathbb{N}_0, \forall p$ Multiindizes mit $2s + [p] \leq k\}$

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, den 25.01.2011, bis 8.15 Uhr.