
Aufgabe 1 *(4 Punkte)*
Sei $f \in H^{0,\alpha}(\mathbb{H}^n \times (0,T))$ gegeben mit $f(\cdot,t) = 0$ auf $\partial\mathbb{H}^n$ $\forall t \in (0,T)$. Zeigen Sie, dass für die Lösung G von

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial t} = \Delta G + f, & \text{in } \mathbb{H}^n \times (0,T), \\ G(\cdot,0) = 0 & \text{in } \mathbb{H}^n \end{cases}$$

gilt

$$\left[\frac{\partial G}{\partial x^k}(x,\cdot)\right]_{C^{\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}}} \leq c(n,T)\|f\|_{H^{0,\alpha}(\mathbb{H}^n\times(0,T))} \quad \forall k = 1,...,n,\ \forall x \in \mathbb{H}^n.$$

Hinweis: Prüfen Sie nach, dass der Beweis für

$$\left|\frac{\partial^2 G}{\partial x^i \partial x^j}(x,t) - \frac{\partial^2 G}{\partial x^i \partial x^j}(x,s)\right| \leq c_0(n,T)|t-s|^{\frac{\alpha}{2}}\|f\|_{H^{0,\alpha}(\mathbb{H}^n\times(0,T))}$$

übertragen werden kann, um das folgende Resultat zu erhalten:

$$\left|\frac{\partial G}{\partial x^k}(x,t) - \frac{\partial G}{\partial x^k}(x,s)\right| \leq c_0(n,T)|t-s|^{\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}}\|f\|_{H^{0,\alpha}(\mathbb{H}^n\times(0,T))}.$$

Aufgabe 2 *(4 Punkte)*
Sei (M^n, g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n. Für $u \in W^{2,p}(M,g)$ gelte die Definition

$$\|u\|_{W^{2,p}(M,g)} := \left(\int_M \left(|u|^p + |\nabla u|_g^p + |\nabla^2 u|_g^p\right) \mathrm{d}\mu_g\right)^{\frac{1}{p}}$$

wie aus der Vorlesung.
Seien außerdem $\varphi_\beta : U_\beta \to \varphi(U_\beta)$, $\beta \in \{1,...,N\}$, feste Koordinaten von M mit $\bigcup_{\beta=1}^N = M$, die auch noch $U_\beta \subset\subset V_\beta$ und $\varphi_\beta = \psi_\beta|_{U_\beta}$ erfüllen mit $\psi_\beta : V_\beta \to \psi(V_\beta)$ Koordinaten von M. Definiere

$$\tilde{\|}u\tilde{\|}_{W^{2,p}(M,g)} := \left(\sum_{\beta=1}^N \int_{\tilde{U}_\beta} \left(|\tilde{u}_\beta|^p + |D\tilde{u}_\beta|^p + |D^2\tilde{u}_\beta|^p\right) \mathrm{d}\mathcal{L}^n\right)^{\frac{1}{p}},$$

wobei $\tilde{u}_\beta := u \circ \varphi_\beta^{-1}$ und $\tilde{U}_\beta := \varphi_\beta(U_\beta)$ gelte. Zeigen Sie: Die beiden Normen $\|\cdot\|_{W^{2,p}(M,g)}$ und $\tilde{\|}\cdot\tilde{\|}_{W^{2,p}(M,g)}$ sind auf M äquivalent.

Aufgabe 3 *(4 Punkte)*
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $W_o^{1,2}(U) := \overline{C_c^\infty(U)}^{W^{1,2}}$ definiert. Zeigen Sie, dass eine Konstante $c(n,U) > 0$ existiert mit $\int_U |u|^2 \mathrm{d}\mathcal{L}^n \leq c \int_U |Du|^2 \mathrm{d}\mathcal{L}^n$ für alle $u \in W_o^{1,2}(U)$.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, den 01.02.2011, bis 8.15 Uhr.