Übungsaufgaben zur Vorlesung Einführung in geometrische und parabolische Evolutionsgleichungen — WS 2010/11, Blatt 2
PD Dr. M. Simon, E. Mäder — 02.11.2010
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/analysis/evngleichung/

Bemerkung: Es wird im Folgenden immer die **Einsteinsche Summenkonvention** verwendet.

Aufgabe 1
Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n.

1. Seien $\phi : U \to \phi(U)$ und $\psi : V \to \psi(V)$ Karten mit $p \in U \cap V$. Verifizieren Sie die folgenden Formeln für einen Koordinatenwechsel:

$$\begin{aligned} {}^{\phi}\frac{\partial}{\partial x^j}(p) &= \frac{\partial(\psi \circ \phi^{-1})^i}{\partial x^j}(\phi(p))\, {}^{\psi}\frac{\partial}{\partial x^i}(p) \\ {}^{\phi}dx^j(p) &= \frac{\partial(\phi \circ \psi^{-1})^j}{\partial x^i}(\psi(p))\, {}^{\psi}dx^i(p). \end{aligned}$$

2. Sei $X : M \to TM$ ein glattes Vektorfeld auf M und ω eine 1-Form auf M, lokal $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ bzw. $\omega = \omega_k dx^k$. Zeigen Sie: Die Abbildung

$$X(\omega) : M \to \mathbb{R}, X(\omega)(p) := X^i(p)\omega_i(p)$$

ist eine wohldefinierte Abbildung, das heißt, sie hängt nicht von der Wahl der Koordinaten ab.

3. Sei T ein $\binom{l}{k}$ Tensor auf M. Somit besitzt T eine lokale Darstellung

$$T = T^{j_1,\ldots,j_l}_{i_1,\ldots,i_k} dx^{i_1} \otimes \ldots \otimes dx^{i_k} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_l}}.$$

Sei $m \in \{1, \ldots, k\}$, $r \in \{1, \ldots, l\}$ fest. Nun sei R lokal definiert durch

$$R := T^{j_1,\ldots,j_{r-1},i,j_{r+1},\ldots,j_l}_{i_1,\ldots i_{m-1},i,i_{m+1},\ldots,i_k} dx^{i_1} \otimes \ldots \otimes dx^{i_{m-1}} \otimes dx^{i_{m+1}} \otimes \ldots \otimes dx^{i_k} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_{r-1}}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_{r+1}}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_l}}.$$

Zeigen Sie: R ist ein wohldefinierter $\binom{l-1}{k-1}$ Tensor auf M.

Aufgabe 2
Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n und $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ eine Riemannsche Metrik auf M. Sei $(S^{ij}(p))_{1\leq i,j\leq n}$ die zu $(g_{ij}(p))_{1\leq i,j\leq n}$ inverse Matrix, d.h. $S^{ij} g_{ik} = \delta^j_k$. Es sei S definiert durch $S := S^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}$. Zeigen Sie: S ist wohldefiniert, d.h. S hängt nicht von der Wahl der Koordinaten ab. Dadurch ist S auf ganz M wohldefiniert.

Fortsetzung auf der nächsten Seite!

Aufgabe 3
Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n. Für zwei glatte Vektorfelder X und Y auf M sei die Lie-Klammer wie in der Vorlesung in lokalen Koordinaten definiert:

$$[X,Y] := \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j} Y^j - \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} X^j \right) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Zeigen Sie: Die Definition von $[X,Y]$ ist unabhängig von der Wahl der Karte.

Aufgabe 4 (Bonusaufgabe!)
Sei $M = \mathbb{R} \cup \{p\}$, p ein beliebiger Punkt nicht in $\mathbb{R}$. Sei $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ die Standard-Topologie auf $\mathbb{R}$ und definiere

$$\mathcal{O} = \{U \cup V : U \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}, V = \emptyset \text{ oder } V = \{p\} \cup (W \setminus \{0\}),\ \text{wobei } W \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \text{ mit } 0 \in W\}\,.$$

1. Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}$ eine Topologie auf $M = \mathbb{R} \cup \{p\}$ ist.
2. Konstruieren Sie einen C^0-Atlas für $(M, \mathcal{O})$.
3. Zeigen Sie: M ist nicht hausdorffsch.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, den 09.11.2010, bis 8.15 Uhr.