Aufgabe 1 *(4 Punkte)*
Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n. In der Vorlesung wurde

$$(\nabla\omega)(p)(X_p, Y_p) := X_p(\omega(\cdot)Y(\cdot)) - \omega(p)\left(\nabla_{X_p}Y(\cdot)\right)$$

definiert, wobei $\omega : V \subset M \to (TM)^*$ eine 1-Form ist und $X_p, Y_p \in T_pM\ \forall p \in V$. Außerdem ist $Y(\cdot) : V \to TM$ eine beliebige C^1-Fortsetzung von $Y_p \in T_pM$. Prüfen Sie nach, dass die rechte Seite nicht von der Wahl der Fortsetzung von Y_p abhängt (d.h. $\nabla\omega$ ist wohldefiniert). Zeigen Sie außerdem $\nabla_i\omega_j(p) = \left(\frac{\partial\omega_j}{\partial x^i}(p) - \Gamma_{ij}^k(p)\omega_k(p)\right)$, wobei $\nabla_i\omega_j(p) := (\nabla\omega)(p)(\frac{\partial}{\partial x^i}(p), \frac{\partial}{\partial x^j}(p))$ ist.

Aufgabe 2 *(8 Punkte)*
Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n und $F : M \to \mathbb{R}^k$ eine glatte Einbettung. Es sei die Riemannsche Metrik $g(p)(\cdot,\cdot)$ auf M definiert durch

$$g(p)(\frac{\partial\gamma}{\partial t}|_{t=0}, \frac{\partial\sigma}{\partial t}|_{t=0}) :=< \frac{\partial\tilde{\gamma}}{\partial t}|_{t=0}, \frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial t}|_{t=0} >_{\mathbb{R}^k} .$$

Hierbei sind $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, $\sigma : (-\delta, \delta) \to M$ zwei C^1-Kurven mit $\gamma(0) = p = \sigma(p)$ und $\tilde{\gamma} := F \circ \gamma$, $\tilde{\sigma} := F \circ \sigma$. Es ist $\frac{\partial\gamma}{\partial t}|_{t=0} \in T_pM$ im Sinne von $\frac{\partial\gamma}{\partial t}|_{t=0}(f) := \frac{\partial(f\circ\gamma)}{\partial t}|_{t=0}$ und es ist $\frac{\partial\tilde{\gamma}}{\partial t}|_{t=0} = \left(\frac{\partial\tilde{\gamma}^1}{\partial t}|_{t=0}, \ldots, \frac{\partial\tilde{\gamma}^k}{\partial t}|_{t=0}\right) \in \mathbb{R}^k$. Das Symbol $< \cdot,\cdot >_{\mathbb{R}^k}$ bezeichnet das Standard-Skalarprodukt im $\mathbb{R}^k$.

Fortsetzung auf der nächsten Seite!

Fortsetzung von Aufgabe 2
Zeigen Sie nun

$$ {}^{g}\nabla_{X_p} Y = K_p^{-1}\left(\Pi_{{}_0T_pM}\left(D_{\tilde{X}_p}\tilde{Y}\right)\right). \tag{1} $$

Dabei gelten die folgenden Bezeichnungen:

- $\Pi_{{}_0T_pM}$ ist die Projektion auf den Tangentialraum ${}_0T_pM$, siehe auch Definition 2.4 aus der Vorlesung.
- $K_p : T_pM \to {}_0T_pM \subset \mathbb{R}^k$ ist der Vektorraumisomorphismus

  $$ K_p(\frac{\partial \gamma}{\partial t}|_{t=0}) = \frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial t}|_{t=0} $$

  und $K_p^{-1} : {}_0T_pM \to T_pM$ ist die inverse Abbildung von K_p
- Es ist $\tilde{X}_p := \sum_{i=1}^k \tilde{X}_p^i e_i \in \mathbb{R}^k$, wobei e_i $(i = 1, ..., k)$ die Standard-Basisvektoren von $\mathbb{R}^k$ sind, und $\tilde{X}_p^i$ erfüllen

  $$ DF(p)(X_p) = \sum_{i=1}^k \tilde{X}_p^i \, \frac{{}^{st}\partial}{\partial x^i}(F(p)). $$

  Hierbei sind $\frac{{}^{st}\partial}{\partial x^i}(q)$ die Koordinatenvektoren von $T_q\mathbb{R}^k$, d.h. $\frac{{}^{st}\partial}{\partial x^i}(q)(f) = \frac{\partial f}{\partial x^i}|_q$ für $f \in C^\infty(\mathbb{R}^k)$.
- $\tilde{Y} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ ist eine glatte Fortsetzung von $\tilde{Y}_p$, wobei $\tilde{Y}_p$ analog wie $\tilde{X}_p$ definiert ist. Es ist außerdem

  $$ D_{\tilde{X}_p}\tilde{Y} := \sum_{i,j=1}^k \tilde{X}_p^i \, \frac{\partial \tilde{Y}^j}{\partial x^i} \, e_j. $$

Hinweis: Prüfen Sie nach, dass die rechte Seite in (1) wohldefiniert ist (ist Wahl der Fortsetzung $\tilde{Y}$ relevant?) und dass dieser Ausdruck gewisse Eigenschaften (i) bis (iv) aus der Vorlesung erfüllt.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, den 16.11.2010, bis 8.15 Uhr.