Übungsaufgaben zur Vorlesung Einführung in geometrische und parabolische Evolutionsgleichungen WS 2010/11, Blatt 4
PD Dr. M. Simon, E. Mäder 16.11.2010
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/analysis/evngleichung/

Aufgabe 1 *(4 Punkte)*
Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n, T ein $\binom{3}{2}$ Tensor auf M und S ein $\binom{0}{2}$ Tensor auf M. Es sei lokal definiert:

$$R_{ij}^l := T_{ij}^{klm} \cdot S_{km} \quad \text{und} \quad R := R_{ij}^l \, dx^i \otimes dx^j \otimes \partial_l .$$

Zeigen Sie, dass gilt

$$\nabla_s R_{ij}^l = \left(\nabla_s T_{ij}^{klm}\right) \cdot S_{km} + T_{ij}^{klm} \cdot \left(\nabla_s S_{km}\right),$$

wobei $\nabla_s R_{ij}^l := (\nabla R)\left(\partial_s, \partial_i, \partial_j, dx^l\right)$ (und $\nabla_s T_{ij}^{klm}$, $\nabla_s S_{km}$ analog) definiert ist.

Aufgabe 2 *(4 Punkte)*
Sei $f : \mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}$, $T < \infty$, eine glatte Lösung zu

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f, \\ f(\cdot, 0) = f_0, \end{cases}$$

wobei $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion ist, die $M_0 := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} f_0(x) < \infty$ (bzw. $m_0 := \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f_0(x) > -\infty$) erfüllt. Es gelte außerdem

$$|f(x,t)| \le c_2 e^{c_1 |x|^\alpha} \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T].$$

Dabei ist $0 \le \alpha < 2$, und $0 < c_1, c_2 < \infty$ sind Konstanten. Zeigen Sie

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} f(x,t) \le M_0 \quad \forall t \in [0,T]$$

$$\left(\text{bzw. } \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x,t) \ge m_0 \quad \forall t \in [0,T]\right).$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $\tilde{f}(x,t) := f(x,t) - M_0 - \epsilon(1+kt)e^{|x|^2(1+kt)}$, wobei $k = k(n) > 0$ eine Konstante und $\epsilon > 0$ klein ist. Beschränken Sie sich zunächst auf das Zeitintervall $\left[0, \frac{1}{k}\right]$.

Aufgabe 3 *(4 Punkte)*
Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n, sei $f : M \to \mathbb{R}$ glatt und $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatt. Zeigen Sie für $x \in M$

$$\Delta_g(\phi \circ f)(x) = \phi'(f(x))\Delta_g f(x) + \phi''(f(x))|^g\nabla f|^2(x),$$

wobei $|^g\nabla f|^2(x) := g(x)\left({}^g\nabla f^\sharp(x), {}^g\nabla f^\sharp(x)\right)$ definiert ist. Zeigen Sie weiterhin

1. $(\Delta_g f^2) = 2f\Delta_g f + 2|^g\nabla f|^2(x)$
2. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig. Zeigen Sie, dass für alle $x \in M$ mit $f(x) > 0$ gilt

$$\left(\Delta_g f^\alpha\right)(x) = \alpha f^{\alpha-1}(x)\left(\Delta_g f\right)(x) + (\alpha - 1)\alpha f^{\alpha-2}(x)|^g\nabla f|^2(x).$$

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, den 23.11.2010, bis 8.15 Uhr.