Aufgabe 1 *(4 Punkte)*
Im Beweis des Maximumprinzips für kompakte Mannigfaltigkeiten wurde benutzt, dass $g^{ij}M_{ij} \leq 0$ gilt, wobei die symmetrischen Matrizen $(g^{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ und $(M_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ (mit Einträgen jeweils in $\mathbb{R}$) die folgenden Eigenschaften besitzen:

$$\begin{aligned} \left(g^{ij}\right)_{1\leq i,j\leq n} &> 0 \quad \text{(Diese Schreibweise meint, dass die Matrix positiv definit ist.)} \\ (M_{ij})_{1\leq i,j\leq n} &\leq 0 \quad \text{(Die Matrix ist negativ semi-definit.)} \end{aligned}$$

Beweisen Sie dies.

Aufgabe 2 *(4 Punkte)*
Sei M^n eine glatte, kompakte Mannigfaltigkeit der Dimension n. Sei $l : M^n \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ glatt. Sei $l : M^n \times [0,T) \to \mathbb{R}$ eine glatte Lösung von

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \Delta_g f(x,t) + l(x,t)f(x,t) \qquad (\text{für } (x,t) \in M^n \times (0,T)).$$

Zeigen Sie für ein beliebiges $S \in (0,\infty)$

$$\sup_{x\in M^n} |f(x,t)| \leq c = c\big(\sup_{x\in M^n} |f(x,0)|, l|_{[0,S]}, S\big) < \infty \quad \forall t \in [0,S] \cap [0,T)\,.$$

Aufgabe 3 *(6 Punkte)*
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ glatt und $f_{h,v}$ folgendermaßen definiert:

$$f_{h,v} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f_{h,v}(x) := \frac{f(x+hv) - f(x)}{h} \text{ für } v \in \mathbb{R}^n \text{ mit } |v| = 1 \text{ und } h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

i) Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fixiert. Zeigen Sie: Für alle $\epsilon > 0$ und $|h| \leq h_1$ (wobei $h_1 > 0$ klein genug gewählt ist) existiert ein $\delta = \delta(h_1) > 0$ (unabhängig von v) mit

$$|f_{h,v}(x) - f_{h,v}(y)| \leq \epsilon \quad \forall x,y \in \overline{B_2(x_0)} \text{ mit } |x-y| < \delta.$$

ii) Sei nun $f : \mathbb{R}^n \times [0,T) \to \mathbb{R}$ eine glatte Lösung von $\dot{f} = \Delta f$. Zeigen Sie, dass $\dot{f}_{h,v} = \Delta f_{h,v}$ gilt, wobei $f_{h,v}(x,t) := (f(\cdot,t))_{h,v}(x)$ definiert ist.

iii) Sei nun $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ glatt mit $|f_0(x)| \leq c_0\ \forall x \in \mathbb{R}^n$. Außerdem erfülle f_0 eine gleichmäßige Lipschitzbedingung, d.h. es existiert eine Konstante $c_1 > 0$, so dass $|f_0(x) - f_0(y)| \leq c_1|x-y|$ gilt für alle $x,y \in \mathbb{R}^n$. Weiterhin sei $f : \mathbb{R}^n \times [0,T) \to \mathbb{R}$ die in der Vorlesung hergeleitete glatte Lösung von

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f, \\ f(\cdot,0) = f_0. \end{cases}$$

Zeigen Sie $f(\cdot,t) \overset{C^1_{\text{loc}}}{\to} f_0 \ \ (t \searrow 0)$. Hinweis: Benutzen Sie (i) und (ii).

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, den 30.11.2010, bis 8.15 Uhr.