Aufgabe 1 (Tychenoff-Lösung) *(4 Punkte)*

i) Zeigen Sie: Es existiert eine glatte Lösung $f : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ von

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f, \\ f(\cdot, 0) = 0, \end{cases}$$

so dass für jedes $0 < c_0 < \infty$ und $0 < t_0 < \infty$ gilt: Es existiert ein $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, t_0]$ mit $|f(x, t)| \geq c_0$.

ii) Konstruieren Sie eine glatte Lösung $f : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ von $\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f$ mit den Eigenschaften $\sup_{\mathbb{R}^n} |f(\cdot, t)| \to 0 \ \ (t \searrow 0)$ und $f \not\equiv 0$.

Aufgabe 2 *(4 Punkte)*

i) Sei $0 < \alpha < 1$. Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) := |x|^\alpha$. Zeigen Sie $f \in C^\alpha(\mathbb{R}^n)$ und $[f]_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)} = 1$.

ii) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $0 < \alpha < 1$ und $f : D \to \mathbb{R}$ mit $f \in C^{0,\alpha}(\bar{D})$ gegeben. Es sei $\Omega := \left(\bar{D}\right)^c$ definiert. Sei weiterhin $g : \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben mit $g \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, und die Fortsetzung von g auf $\partial\Omega$ stimme mit der Fortsetzung von f auf ∂D überein (kurz geschrieben $g|_{\partial\Omega} = f|_{\partial D}$). Zeigen Sie: Für die Funktion

$$l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad l(x) := \begin{cases} \bar{f}(x) \text{ für } x \in \bar{D}, \\ g(x) \text{ für } x \in \Omega \end{cases}$$

gilt $l \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$. Dabei ist $\bar{f} : \bar{D} \to \mathbb{R}$ die stetige Fortsetzung von f.

Aufgabe 3 *(4 Punkte)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\bar{\Omega}$ kompakt. Seien $u_0 \in C^0(\Omega)$, $\psi : \Omega \times (0, T) \to \mathbb{R}$ und $u \in H^2_{\text{loc}}(\Omega \times (0, T))$ gegeben, so dass gilt

$$\dot{u} = \Delta u \text{ auf } \Omega \times (0, T),$$
$$\|u(\cdot, t) - u_0\|_{C^0(\Omega)} \to 0 \ \ (t \searrow 0)$$

und $\forall \epsilon > 0 \ \ \forall 0 < r < s < T \ \ \exists \delta > 0$ so dass

$$|u(x, t) - \psi(x, t)| < \epsilon \quad \text{gilt } \forall x \in \Omega \text{ mit } d(x, \partial\Omega) \leq \delta \text{ und } \forall t \in (r, s).$$

Zeigen Sie: Damit ist die Lösung u eindeutig bestimmt.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, den 07.12.2010, bis 8.15 Uhr.