Aufgabe 1 *(4 Punkte)*
Es sei $\mathbb{H}^n$ definiert durch $\mathbb{H}^n := \{x = (x^1, ..., x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^n > 0\}$ und $0 < \alpha < 1$ beliebig. Weiterhin sei $f \in H^{0,\alpha}\left(\overline{\mathbb{H}^n \times (0,\infty)}\right)$ gegeben mit $f|_{\partial\mathbb{H}^n}(\cdot, t) \equiv 0 \ \forall t \in (0,\infty)$. Man definiere

$$\tilde{f}(x,t) := \begin{cases} \bar{f}(x,t) & \text{für } x^n \geq 0, \\ -f(x^1, ..., x^{n-1}, -x^n, t) & \text{für } x^n < 0, \end{cases}$$

wobei $\bar{f}(\cdot, t)$ eine stetige Fortsetzung von $f(\cdot, t)$ auf $\overline{\mathbb{H}^n}$ ist.
Zeigen Sie: $\tilde{f} \in H^{0,\alpha}\left(\overline{\mathbb{R}^n \times (0,\infty)}\right)$

Aufgabe 2 *(4 Punkte)*
Sei $0 < \alpha < 1$, $0 < 2\beta < 1$ mit $2\beta \neq \alpha$ gegeben. Es sei $f : \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,t) := |x|^\alpha + |t|^\beta$. Zeigen Sie: Für alle $0 < \gamma < 1$ gilt $f \notin H^\gamma(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$.

Aufgabe 3 *(4 Punkte)*
In der Vorlesung (siehe vor Lemma 6.3) wurde $\frac{\partial^2 G}{\partial x^i \partial x^j}(x_0, t_0)$ definiert für beliebiges $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0, T)$. Dann wurde die Abschätzung

$$\left|\frac{\partial^2 G}{\partial x^i \partial x^j}(x_0, t_0) - \frac{\partial^2 G}{\partial x^i \partial x^j}(x_0, s_0)\right| \leq c(\alpha)|t_0 - s_0|^{\frac{\alpha}{2}}$$

gezeigt für den Fall $2s_0 - t_0 \geq 0$ (und $s_0 \leq t_0$). Zeigen Sie dies für den Fall $2s_0 - t_0 \leq 0$ (und $s_0 \leq t_0$).

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, den 14.12.2010, bis 8.15 Uhr.