Übungsaufgaben zur Vorlesung Einführung in geometrische und parabolische Evolutionsgleichungen WS 2010/11, Blatt 8
PD Dr. M. Simon, E. Mäder 14.12.2010
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/analysis/evngleichung/

Aufgabe 1 *(4 Punkte)*
Beweisen Sie das folgende Hilfslemma aus der Vorlesung (siehe Lemma 6.10):
Betrachten Sie $p := (0, ..., 0, 1) \in \mathbb{R}^n$, $B_1^n(p) := \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x - p| < 1\}$ und $f : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$, $f(x) := \frac{x}{|x|^2}$. Zeigen Sie

i) $f|_{\partial B_1^n(p) \cap \partial B_1^n(0)}$ ist die Identität auf $\partial B_1^n(p) \cap \partial B_1^n(0)$.

ii) $f\left(\overline{B_1^n(p)} \setminus \{0\}\right) = \overline{L}$, wobei $\overline{L} := \left\{(x^1, ..., x^n) \mid x^n \geq \frac{1}{2}\right\}$ definiert ist.

iii) $f\left(\partial B_1^n(p) \setminus \{0\}\right) = \partial L$.

Aufgabe 2 *(6 Punkte)*
Sei $f \in H^{0,\alpha}\left(\overline{\mathbb{H}^n \times (0, \infty)}\right)$ mit $f(x,t) = 0 \ \forall x \in \partial\mathbb{H}^n$ und $t \geq 0$. Es gelte außerdem $|f(x,t)| \leq |\varphi(x)| \ \forall (x,t) \in \mathbb{H}^n \times (0, \infty)$ mit einer Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die $|\varphi(x)| \to 0$ $(|x| \to \infty)$ erfüllt (d.h. $\forall \epsilon > 0 \exists R = R(\epsilon)$, so dass $|\varphi(x)| \leq \epsilon$ gilt für alle $|x| \geq R$).
Sei weiterhin $L : \mathbb{H}^n \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $L \in H^{2,\alpha}\left(\overline{\mathbb{H}^n \times (0, \infty)}\right)$ die Lösung zu

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial t} = \Delta L + f \text{ in } \mathbb{H}^n \times (0, \infty), \\ L(\cdot, 0) = 0 \text{ in } \mathbb{H}^n, \\ L(x,t) = 0 \text{ für } (x,t) \in \partial\mathbb{H}^n \times (0, \infty) \end{cases}$$

aus Proposition 6.7.
Zeigen Sie: $\forall \infty > s > 0$, $\forall \epsilon > 0 \ \exists R(s, \epsilon) > 0$, so dass $|L(x,t)| \leq \epsilon$ gilt für alle $x \in \mathbb{H}^n$ mit $|x| \geq R(s, \epsilon)$ und für alle $t \leq s$.
Hinweis: Multiplizieren Sie mit einer geeigneten Abschneidefunktion und nutzen Sie das Maximumprinzip auf ganz $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 3 (Kelvin-Transformation) *(4 Punkte)*
Sei $p := (0, ..., 0, 1) \in \mathbb{R}^n$, $u : B_1^n(p) \to \mathbb{R}$ mit $u \in C^2\left(B_1^n(p)\right)$ gegeben. Definiere $\tilde{u} : L \to \mathbb{R}$ durch

$$\tilde{u}(\tilde{x}) := |\tilde{x}|^{2-n} u\left(\frac{\tilde{x}}{|\tilde{x}|^2}\right),$$

wobei $L := \left\{\tilde{x} = (\tilde{x}^1, ..., \tilde{x}^n) \mid \tilde{x}^n > \frac{1}{2}\right\}$ definiert ist. Zeigen Sie

$$\left(\Delta_{\tilde{x}}\tilde{u}\right)(\tilde{x}_0) = \frac{1}{|\tilde{x}_0|^{n+2}} \left(\Delta_x u\right)\left(\frac{\tilde{x}_0}{|\tilde{x}_0|^2}\right) \quad \forall \tilde{x}_0 \in L.$$

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, den 21.12.2010, bis 8.15 Uhr.