Aufgabe 1 (Eindimensionale Wärmeleitungsgleichung) *(8 Punkte)*
Wir suchen Lösungen $u \in C^2\left((0,L)\times(0,\infty)\right)\cap C^0\left([0,L]\times[0,\infty)\right)$ zu

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = u_{xx}, \quad \forall (x,t)\in(0,L)\times(0,\infty) \\ u(x,0) = f(x), \quad \forall x\in[0,L] \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad \forall t\geq 0, \end{cases} \tag{1}$$

wobei $f:[0,L]\to\mathbb{R}$ die Bedingung $f(0)=f(L)=0$ erfüllt.

i) Sei $u(x,t) = X(x)T(t)$ eine Lösung von (1) (wobei nun $L=1$ ist) mit Funktionen $T\in C^1([0,\infty))$ und $X\in C^2([0,1])$. Zeigen Sie:

(a) Es existiert ein $\lambda\in\mathbb{R}$ mit
$$\begin{cases} T'(t) = -\lambda T(t), \\ X''(x) = -\lambda X(x). \end{cases}$$

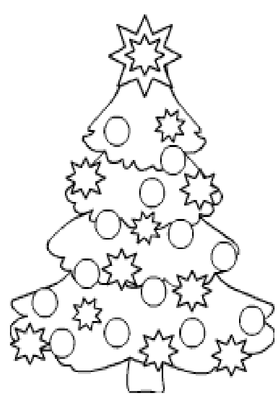
(b) $\lambda\leq 0$ führt zu einem Widerspruch, es sei denn $f\equiv 0$.

(c) Für $\lambda>0$ existiert ein $B\in\mathbb{R}$ mit $X(x) = B\sin(\sqrt{\lambda}x)$, und es existiert ein $m\in\mathbb{N}$ mit $\sqrt{\lambda} = m\pi$.

ii) Zeigen Sie: Die Funktion
$$u(x,t) := \sum_{m=1}^{N} D_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) e^{-\frac{m^2\pi^2}{L^2}t}$$
löst (1) für $f(x) = \sum_{m=1}^{N} D_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$. Hierbei sind $D_m\in\mathbb{R}$ Konstanten für $m=0,...,N$.

iii) Zeigen Sie: Falls $f\in C^1([0,L])$ ist, dann existiert eine Lösung $u\in C^2\left((0,L)\times(0,\infty)\right)\cap C^0\left([0,L]\times[0,\infty)\right)$ von (1).

iv) Zeigen Sie: Die Lösung u aus (*iii*) ist sogar in $C^\infty((0,L)\times(0,\infty))$.
Interpretation: Die Wärmeleitungsgleichung glättet Anfangsdaten.



Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, den 11.01.2011, bis 8.15 Uhr.