

Aufgabe 1

(4 Punkte)

Seien $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ und $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, wobei $U, V \subset \mathbb{C}$ offen. Dann gilt

- a) $f + g : U \cap V \rightarrow \mathbb{C}$ und $f \cdot g : U \cap V \rightarrow \mathbb{C}$ sind holomorph mit

$$(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z)$$

und

$$(f \cdot g)'(z) = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$$

für alle $z \in U \cap V$.

- b) Falls $g(z) \neq 0$ für alle $z \in V$, so ist $\frac{f}{g} : U \cap V \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - g'(z)f(z)}{g^2(z)}$$

für alle $z \in U \cap V$.

Aufgabe 2

(4 Punkte)

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph.

- a) Für $z \in U$ sei $z =: x + iy$. Zeigen Sie, dass dann $\tilde{f}$ definiert durch

$$\tilde{f} : \begin{cases} U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{f}^1(x, y) := \operatorname{Re}(f(z)) \\ \tilde{f}^2(x, y) := \operatorname{Im}(f(z)) \end{pmatrix} \end{cases}$$

(total reell) differenzierbar ist, wenn man U als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ auffasst.
Zeigen Sie außerdem, dass für die Jacobimatrix von $\tilde{f}$ gilt

$$D\tilde{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{f}^1}{\partial x} & -\frac{\partial \tilde{f}^2}{\partial x} \\ \frac{\partial \tilde{f}^2}{\partial x} & \frac{\partial \tilde{f}^1}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

- b) Eine Funktion $g : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heiße lokal konstant (auf U), falls für alle $z \in U$ ein Ball $B_r(z) \subset U$ existiert, so dass $g|_{B_r(z)}$ konstant ist. Beweisen Sie: Falls $f' \equiv 0$ auf U , so ist f lokal konstant. *(bitte wenden!)*

- c) Eine differenzierbare Funktion $l : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ heiße konform, falls eine Funktion $\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}^+$ existiert, so dass

$$\langle Dl(p)(v), Dl(p)(w) \rangle_{\mathbb{R}^2} = \lambda(p) \langle v, w \rangle_{\mathbb{R}^2}$$

für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$ und $p \in U$ ist. Zeigen Sie: Ist $f' \neq 0$ auf U , so ist $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ konform ($\tilde{f}$ wie in a)).

Aufgabe 3

(4 Punkte)

Sei wieder $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion mit $f(x + iy) =: u(x, y) + iv(x, y)$ wobei $u, v \in C^1(U \subset \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Zeigen Sie: Falls die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sind, d.h. falls

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

auf U gilt, so ist f holomorph.

Aufgabe 4

(4 Punkte)

Sei π wie in der Vorlesung definiert. Dann gelten

$$e^{\pi i/2} = i, \quad e^{\pi i} = -1, \quad e^{3\pi i/2} = -i \quad \text{und} \quad e^{2\pi i} = 1.$$

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Mittwoch, 05.05.2010 bis 11:15 Uhr.