

---

**Aufgabe 1**

(4 Punkte)

- a) Sei  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Zeigen Sie, dass gilt

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

- b) Für  $a \in \mathbb{C}$  beliebig existiert ein  $z \in \mathbb{C}$  mit  $z^2 = a$ . Geben Sie alle Lösungen von  $z^2 = a$  an! Hinweis: Man kann  $x, y, m, n \in \mathbb{R}$  suchen mit  $(x + iy)^2 = m + in$ .

- c) Zeigen Sie für alle  $a, b \in \mathbb{C}$ :

i)  $-|a| \leq \operatorname{Re}(a) \leq |a|$  und  $-|a| \leq \operatorname{Im}(a) \leq |a|$

ii)  $|a - b| \geq ||a| - |b||$ .

**Aufgabe 2** (zu Proposition 2.5).

(4 Punkte)

Weisen Sie nach:

- a)  $(\mathbb{C}, d_{\mathbb{C}})$  ist vollständig

- b) Seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folgen in  $\mathbb{C}$ .

i)  $a_n \rightarrow a \in \mathbb{C}$  und  $b_n \rightarrow b \in \mathbb{C} \Rightarrow a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot b$ .

ii)  $a_n \rightarrow a \in \mathbb{C}$  und  $b_n \rightarrow b \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{a}{b}$   
( $\frac{a_n}{b_n}$  ist wohldefiniert für  $n$  groß genug).

iii)  $|a_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |a| \in \mathbb{R}$ .

iv)  $|a_n| \leq C < \infty$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann existiert eine Teilfolge  $(a_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$  von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und ein  $a \in \mathbb{C}$ , so dass  $a_{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} a$ .

**Aufgabe 3** (Holomorphe Funktionen).

(4 Punkte)

Seien  $f : V \rightarrow \mathbb{C}$  und  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, wobei  $U, V \subset \mathbb{C}$  offen. Zeigen Sie:

- a)  $f \circ g : U \cap g^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{C}$  ist holomorph und es gilt  $(f \circ g)'(z) = f'(g(z)) \cdot g'(z)$  für alle  $z \in U \cap g^{-1}(V)$ . Warum ist  $U \cap g^{-1}(V)$  offen?

- b) Sei  $\hat{f} : \bar{V} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\hat{f}(z) := f(\bar{z})$ . Angenommen, es existiere ein  $a \in V$  mit  $f'(a) \neq 0$ . Zeigen Sie, dass in diesem Fall  $\hat{f}$  nicht holomorph ist!

*Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Mittwoch, 28.04.2010 bis 11:15 Uhr.*