Übungsaufgaben zur Vorlesung
Funktionentheorie — SS 10, Serie 4
PD Dr. M. Simon — 12.Mai 2010
Florian Link

Aufgabe 1 *(Existenz einer Stammfunktion).* (4 Punkte)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene zusammenhängende Menge und $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung mit

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

für alle geschlossenen Integrationswege $\gamma : [a, b] \to U$. Zeigen Sie: Für beliebiges aber fixiertes $p \in U$ ist $F : U \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$F(\omega) := \int_{\gamma_\omega} f(z)dz$$

holomorph mit $F'(\omega) = f(w)$, wobei hier γ_ω ein beliebiger Integrationsweg von p nach ω in U ist.
Bemerkung: In der Vorlesung wurde schon gezeigt, dass F wohldefiniert ist.

Aufgabe 2 *(Parametrisierung nach Bogenlänge).* (4 Punkte)
Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar mit $|\gamma'| \neq 0$. Zeigen Sie: Es existiert eine stetig differenzierbare Umparametrisierung $\sigma : [0, L] \to [a, b]$, so dass $\widetilde{\gamma} := \gamma \circ \sigma : [0, L] \to \mathbb{C}$

$$|\widetilde{\gamma}'| \equiv 1$$

erfüllt, wobei $L := \int_a^b |\gamma'(s)| ds$ (die Bogenlänge von γ) sei.

Aufgabe 3 *(Wegzusammenhang).* (4 Punkte)
Sei $G := \{t^{-1}e^{it} | t \in \mathbb{R}^+\} \subset \mathbb{C}$ und $U := \mathbb{C} \backslash \big(G \cup \{0\}\big)$.

i) Zeigen Sie:

   a) U ist offen

   b) U ist zusammenhängend

ii) Für eine Menge $X \subset \mathbb{C}$ (nicht notwendigerweise offen) sagen wir: *X ist wegzusammenhängend*, falls es für alle $p, q \in X$ einen stetigen Weg $\gamma : [a, b] \to X$ gibt mit $\gamma(a) = p$ und $\gamma(b) = q$. Ist $V := \mathbb{C} \backslash G$ wegzusammenhängend? Beweisen Sie Ihre Aussage!

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Für $U := \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}^+$ sei $g : U \to \mathbb{C}$ eine auf U stetige und auf $U \backslash \{0\}$ holomorphe

(bitte wenden!)

Lösung von $\big(g(z)\big)^k = z$ (vgl. Serie 3, Aufgabe 4 iii)) - z.B. leistet $g(z) := |z|^{1/k}\exp(i\arg(z)/k)$ das Gewünschte. Berechnen Sie für beliebiges $p \in U$ und beliebigen Integrationsweg $\gamma : [a,b] \to U$ von 0 nach p das Wegintegral

$$G(p) := \int_\gamma g(z)dz.$$

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Mittwoch, 19.05.2010 bis 11:15 Uhr.