

1. Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen:

Sei $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ der reeller Vektorraum,

$$(x, y)a + (z, w)b = (ax + bz, ay + bw) \quad \forall a, b, x, y, z, w \in \mathbb{R}.$$

Auf $\mathbb{R}^2$ definieren $\cdot$ durch:

$$(x, y) \cdot (z, w) := (xz - yw, xw + yz) \quad (1.1)$$

Defn. 1.1 $(\mathbb{C}, +, \cdot) := (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

Man weist nach: $+$ und $\cdot$ sind assoziativ und kommutativ. D.h.

$$(a+b)+c = a+(b+c), \quad a+b = b+a, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{C} \quad (1.2)$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \quad a \cdot b = b \cdot a, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{C}. \quad (1.3)$$

Weiterhin gilt:

i) $(\mathbb{C}, +)$ ist eine Gruppe (mit neutralem element $0_{\mathbb{C}} = (0, 0)$)

ii) $(\mathbb{C} \setminus \{0_{\mathbb{C}}\}, \cdot)$ eine Gruppe (" " $1_{\mathbb{C}} = (1, 0)$)

iii) Es gilt das Distributivgesetz:

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{C}$$

Dadurch ist $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ein Körper.

Erinnerung 1.2 : $(K, +, \cdot)$ ist ein Körper

falls a) $+$, $\cdot$ sind assoziativ und kommutativ
b) i), ii) und iii) von oben gelten.

Definition 1.3 : $i := (0, 1)$.

Für $x, y \in \mathbb{R}$,
oder $(x, y) \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} (x, y) &= (x, 0) + (0, y) \\ &= (x, 0) + (0, 1) \cdot y \\ &= (x, 0) + i \cdot y \end{aligned} \quad (1.4)$$

Notation 1.4 Für $x, y \in \mathbb{R}$ ist

$x + iy \in \mathbb{C}$ der element $(x, y) = (x, 0) + i \cdot y \in \mathbb{C}$.

Mit dieser Notation gilt:

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) \stackrel{(1)}{=} (-1, 0) = -1 + i \cdot 0 \in \mathbb{C} \quad (1.5)$$

und

$$(x + iy) \cdot (z + iw) = xz - yw + i(yz + wx)$$

$$\forall x, y, z, w \in \mathbb{R}.$$

Die Menge $K := \{x + i \cdot 0 \in \mathbb{C} \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$

ist auch ein Körper mit $+$, $\cdot$ wie oben definiert,
d.h. K ist ein Unterkörper von $\mathbb{C}$.

K ist Körperisomorphisch zu $\mathbb{R}$ durch:

$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto x + i \cdot 0 \in K \subseteq \mathbb{C}.$$

Notation 1.5 : jedes Element $x \in \mathbb{R}$ wird
auch als Element $x \in \mathbb{C}$ verstanden durch

$$\mathbb{R} \ni x \longrightarrow x + i \cdot 0 \in \mathbb{C}.$$

Mit dieser Notation kann man (1.5)

neu schreiben als

$$\boxed{-i^2 = -1} \quad (1.5')$$

Definition 1.6 :

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{Re}(x + iy) := x \in \mathbb{R}, \\ \operatorname{Im}(x + iy) := y \in \mathbb{R}, \end{array} \right\} \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\overset{\operatorname{Re}}{a} = \operatorname{Re}(a), \quad \overset{\operatorname{Im}}{a} = \operatorname{Im}(a) \quad \forall a \in \mathbb{C},$$

$$\overline{x + iy} := x - i \cdot y \in \mathbb{C}$$

$$\langle z, w \rangle_{\mathbb{C}} := \bar{z} \cdot w \in \mathbb{C} \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$$

$$\langle z, w \rangle := \langle z, w \rangle_{\mathbb{R}} = \operatorname{Re}(\bar{z} \cdot w) \in \mathbb{R} \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$$

$$|z| := \sqrt{\langle z, z \rangle} \in \mathbb{R}_0^+ \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

wir zeigen gleich, dass $\langle z, z \rangle \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

Lemma 1.7:

$$a) \quad \overline{\bar{z}} = z, \quad \overline{a \cdot b} = \bar{a} \cdot \bar{b} \quad \forall z, a, b \in \mathbb{C}$$

$$b) \quad \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(\bar{z}) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$c) \quad \langle z, w \rangle = \overline{\langle w, z \rangle} \quad \forall w, z \in \mathbb{C}, \text{ und}$$

$$d) \quad \langle z, z \rangle \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ und es gilt}$$

$$|x+iy| = \sqrt{x^2+y^2} =: |(x,y)|_{\mathbb{R}^2}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}.$$

$$e) \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$f) \quad |w \cdot z| = |w| |z| \quad \forall w, z \in \mathbb{C}$$

$$g) \quad \text{Dreiecksungleichung: } |w+z| \leq |w| + |z|$$

Polarisierungsidentität: $\forall w, z \in \mathbb{C}$

$$|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2 \langle z, w \rangle$$

Beweis: a), b) : $\overline{\overline{(x+iy)}} = \overline{x-iy} = x+iy$;

$$\operatorname{Re}(x+iy) = x = \operatorname{Re}(x-iy) = \operatorname{Re}(\overline{x+iy}) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\overline{(x+iy) \cdot (r+is)} = \overline{(x-iy) \cdot (r-is)}$$

$$= (xr - ys) - i(yr + sx)$$

$$\overline{(x+iy) \cdot (r+is)} = \overline{(xr - ys) + i(yr + sx)}$$

$$= (xr - ys) - i(yr + sx)$$

$$= \overline{(x+iy)} \cdot \overline{(r+is)}$$

$$\forall x, y, r, s \in \mathbb{R}$$

$$c) \langle z, w \rangle = \operatorname{Re}(\bar{z} \cdot w) = \operatorname{Re}(\overline{\bar{z} \cdot w})$$

$$= \operatorname{Re}(z \cdot \bar{w})$$

$$= \operatorname{Re}(\bar{w} \cdot z)$$

$$= \langle w, z \rangle$$

Rest : Ähnlich.



2. Der metrische Raum $\mathbb{C}$

-6-

Definition 2.1 $d_q : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$d_q(z, w) := |z - w|, \text{ wobei } |\cdot| \text{ in 0.1.6 ist.}$$

Lemma 2.2 d_q ist eine Metrik auf $\mathbb{C}$:

für $z, w, u \in \mathbb{C}$ gilt:

a) $d_q(z, u) = d_q(u, z)$,

b) $d_q(z, u) \geq 0$ mit " $= 0$ " $\Leftrightarrow z = u$,

c) $d_q(z, w) \leq d_q(z, u) + d_q(u, w)$ (Dreiecksungl.)

Beweis: a) von Def. von d_q , b) Def. von d_q und

e) von Lemma 1.7. c) von g) Lemma 1.7 und Def. von d_q .

Definition / Notation / Tatsachen 2.3.10 (X, d) ist ein metrischer Raum, heißt $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, und a), b), c) (mit d_q durch d ersetzt) gelten für $z, w, u \in X$ (Bem.: brauchen kein $+$ oder $\cdot$ um metrische Räume zu definieren).

• $B_r^d(a) := \{ z \in X \mid d(z, a) < r \}$

• $\overline{B_r^d(a)} := \{ z \in X \mid d(z, a) \leq r \}$

Falls klar ist, dann schreiben wir - 7 -

$B_r(a)$ bezi. $\overline{B_r(a)}$.

• $U \subseteq X$ ist offen falls $\forall p \in U, \exists \delta > 0$, so dass $B_\delta(p) \subseteq U$.

• Für eine Folge $(a_n)_{n=1}^\infty, a_n \in X, a \in X$,

$$a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a, \text{ falls } d(a_n, a) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

• Dies ist äquivalent zu: $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$,

so daß $a_n \in B_\varepsilon(a) \quad \forall n \geq N$.

• $(a_n)_{n=1}^\infty$ in (X, d) ist Cauchy, falls $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $d(a_n, a_m) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$.

• Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume.

$f: X \rightarrow Y$ stetig in $x \in X$, falls $(x_n)_{n=1}^\infty, x_n \in X$,
 mit $x_n \rightarrow x \in X$, gilt

$$f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x).$$

D.h. $\forall (x_n)_{n=1}^\infty, x_n \in X$ mit $d_X(x_n, x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

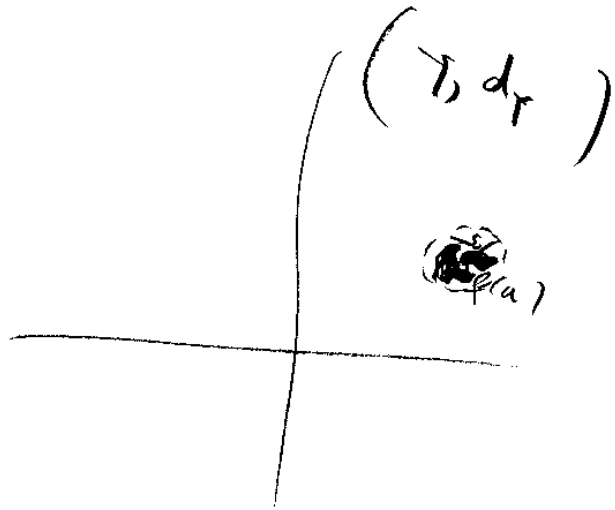
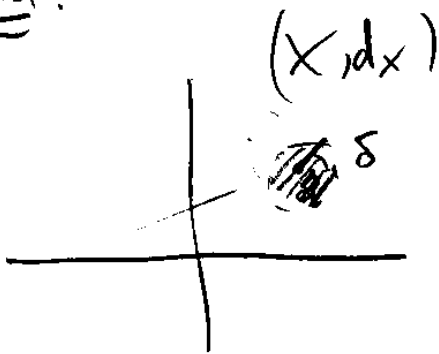
gilt $d_Y(f(x_n), f(x)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

• Dies ist äquivalent zu $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, so dass

$$f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x)).$$

$$\left(\begin{array}{l} Y \subseteq X, \\ f(Y) = \{f(y) \mid y \in Y\} \end{array} \right).$$

Bild:



wie schon gesehen in Lemma 7.7 d) gilt $\forall r, s, x, y \in \mathbb{R}$,

$$d_q(x+iy, r+is) = d_{\mathbb{R}^2}((x, y), (r, s)).$$

$$= \sqrt{(x-r)^2 + (y-s)^2}.$$

$\Rightarrow$

Dadurch sehen wir: Fürs $(a_n)_{n=1}^\infty, a \in \mathbb{C}$ mit $a_n = x_n + iy_n, a = x + iy, x_n, y_n, x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a \Leftrightarrow d_q(a_n, a) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\Leftrightarrow d_q(x_n + iy_n, x + iy) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\Leftrightarrow d_{\mathbb{R}^2}((x_n, y_n), (x, y)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Leftrightarrow x_n \rightarrow x \text{ und } y_n \rightarrow y \text{ in } \mathbb{R} \quad (2.1).$$

Weiterhin gilt: ${}^{\mathbb{R}^2} B_r((x,y)) = {}^{\mathbb{C}} B_r(x+iy)$.

Defn. 2.4: Für $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, $U \subseteq \mathbb{C}$,

$f^{\text{Im}}: U \rightarrow \mathbb{R}$ und $f^{\text{Re}}: U \rightarrow \mathbb{R}$ sind

$$f^{\text{Re}}(z) := \text{Re}(f(z)), \text{ und } f^{\text{Im}}(z) := \text{Im}(f(z)).$$

Es gilt: $f = f^{\text{Re}} + i f^{\text{Im}}$.

Von ${}^{\mathbb{R}^2} d = {}^{\mathbb{C}} d$ sehen wir: Für U offen, $U \subseteq \mathbb{C}$,

$f: U \rightarrow \mathbb{C}$ ist stetig in $z = x+iy \in U$

$\Leftrightarrow \tilde{f}: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist stetig in $(x,y) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$,

woher hier $\tilde{f}(a,b) := (f^{\text{Re}}(a+ib), f^{\text{Im}}(a+ib))$

$\forall (a,b) \in U$. Wir nennen $\tilde{f}$ die reelle Fn. die

zu f assoziiert ist.

Propn 2.5: Diese Aussagen gelten in $\mathbb{C}$.

a) $(\mathbb{C}, d_{\mathbb{C}})$ ist vollständig (d.h. jede Cauchy Folge konvergiert)

b) Seien $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}$ Folgen in $\mathbb{C}$.

i) $a_n \rightarrow a$ in $\mathbb{C}$, $b_n \rightarrow b$ in $\mathbb{C} \Rightarrow a_n b_n \rightarrow ab$ in $\mathbb{C}$

ii) $a_n \rightarrow a$ in $\mathbb{C}$, $b_n \rightarrow b \neq 0$ in $\mathbb{C} \Rightarrow (a_n/b_n) \rightarrow (a/b)$ in $\mathbb{C}$

$((a_n/b_n)$ ist wohldefiniert $\forall n \geq N$, für $N \in \mathbb{N}$ gross genug).

iii) $a_n \rightarrow a \in \mathbb{C} \Rightarrow |a_n| \rightarrow |a|$ in $\mathbb{R}$.

iv) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ in $\mathbb{C}$ und $|a_n| \leq K < \infty \forall n \in \mathbb{N}$ (K eine konstante) 10-
 $\Rightarrow \exists$ Teilfolge $(a_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ von $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ und ein $a \in \mathbb{C}$ mit

3 Holomorphe Funktionen: $a_{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} a \in \mathbb{C}$.

Def. 3.1: Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z \in U$. $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ heißt komplex differenzierbar in z , falls

$$\lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \text{ existiert.}$$

Bemerkung 1: " U offen" $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ so dass, $z+h \in U$
 $\forall h \in \mathbb{C}$ mit $|h| < \varepsilon$. D.h. $f(z+h)$ in Def. ist
 wohldefiniert.

Bemerkung 2: Der Grenzwert "existiert" $\Rightarrow$

$\exists a \in \mathbb{C}$, so dass $\forall$ Folgen $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ in $\mathbb{C}$
 mit $h_n \neq 0$ und $h_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z+h_n) - f(z)}{h_n} = a.$$

Def. 3.1 vortgesetzt: Falls $f: U \rightarrow \mathbb{C}$
 komplex differenzierbar in z ist, dann ist

$$f'(z) := \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \quad (3.1)$$

Falls $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in $z \forall z \in U$
 ist, dann heißt $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph.

$f': U \rightarrow \mathbb{C}$ ist dann durch (3.1)
 definiert.

Bemerkung 3: $f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$ existiert

ist äquivalent zu: $\exists b \in \mathbb{C}$ mit

$$f(z+h) - f(z) = b \cdot h + \phi_z(h)$$

wobei $\phi_z: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, und

$$\frac{\phi_z(h)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 : \begin{cases} (\Leftarrow) \text{ setze } f'(z) := b \dots \\ (\Rightarrow) \text{ setze } \phi_z(h) := f(z+h) - f(z) - f'(z) \cdot h \\ \text{und } b := f'(z). \end{cases}$$

Insbesondere, dies impliziert, dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(z+h) - f(z) = 0, \text{ d.h.}$$

Lemma 3.2: U offen und $f: U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist komplex
diff. in $z \in U \Rightarrow f$ ist stetig in z .

3.3 Beispiele ⁻¹²⁻
 ii) $f: \mathcal{U} \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) := a$ für alle $z \in \mathcal{U}$.

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{a-a}{h} = 0 \quad \forall z \in \mathcal{U} \quad \forall h \in \mathbb{C}, h \neq 0,$$

$\Rightarrow f'(z) = 0 \quad \forall z \in \mathcal{U} \Rightarrow f$ holomorph mit $f': \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$
 ist $f'(z) = 0 \quad \forall z \in \mathcal{U}$.

iii) $f: \mathcal{U} \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z \quad \forall z \in \mathcal{U}$.

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{z+h-z}{h} = 1 \Rightarrow f \text{ ist holomorph mit}$$

$f': \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ ist $f'(z) = 1 \quad \forall z \in \mathcal{U}$.

iii) Ähnlich zeigt man für $f: \mathcal{U} \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n \quad \text{wobei } a_n \in \mathbb{C} \text{ für } n \in \{1, \dots, N\}.$$

$f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ ist hol. mit $f'(z) = \sum_{n=1}^N n a_n z^{n-1}$.

iv) $\underline{\text{U4:}}$ $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z}$ ist holomorph,
 $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$

v) $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) := \overline{z}$ ist NICHT
 holomorph da: sei $z \in \mathbb{C}$ beliebig.

- 13 -

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\overline{z+h} - \bar{z}}{h} = \frac{\bar{h}}{h}.$$

Für Folgen $h_n = \frac{1}{n} + i \cdot 0 = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \in \mathbb{C}$ ist

$$\frac{f(z+h_n) - f(z)}{h_n} = \frac{\overline{(\frac{1}{n})}}{(\frac{1}{n})} = \frac{(\frac{1}{n})}{(\frac{1}{n})} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Für Folgen $h_n = i \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ in $\mathbb{C}$ ist

$$\frac{f(z+h_n) - f(z)}{h_n} = \frac{\overline{h_n}}{h_n} = \frac{\overline{(i/n)}}{(i/n)} = \frac{-i/n}{i/n} = -1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -1.$$

D.h. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$ existiert NICHT

(siehe Bemerkung 2).

~~Erinnere~~

14-

Die fn. $\tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ die zu $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ assoziiert

ist, ist $\tilde{f}(x, y) := (f^{\text{re}}(x+iy), f^{\text{Im}}(x+iy))$

In diesem Fall ist $f(x+iy) = x-iy \Rightarrow f^{\text{re}}(x+iy) = x, f^{\text{Im}}(x+iy) = -y$

$\Rightarrow \tilde{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \tilde{f}(x, y) = (f^{\text{re}}(x+iy), f^{\text{Im}}(x+iy))$

$$= (x, -y).$$

Diese fn. ist unendlich mal reell differenzierbar
überall in $\mathbb{R}^2$.

D-4. $\tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ reell differenzierbar

$\nRightarrow f: U \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar

(wie dieses Beispiel zeigt).

umgekehrt ist aber richtig: Satz 3.3: $f: U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ komplex
diff. in $z \Rightarrow \tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ (die reellen fn. zu f assoziiert) ist diff. in $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

ÜA: $f: U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $u \in U$

$\gamma: V \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, U, V offen,

$\Rightarrow f \circ \gamma: V \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph,
und es gilt:

$$(f \circ \gamma)'(z) = f'(g(z)) \cdot g'(z)$$

Es gilt
ausserdem:

$$D \tilde{f}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} (x, y).$$

Satz 3.4: Sei $f: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, wobei -15-

Dann gilt:

i) $\check{f}: \bar{U} \rightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph, wobei
 $\bar{U} = \{ \bar{z} \mid z \in U \}$, $\check{f}(z) := \overline{f(\bar{z})} \forall z \in \bar{U}$.

ii) Sei $\hat{f}: \bar{U} \rightarrow \mathbb{C}$, $\hat{f}(z) := f(\bar{z}) \forall z \in \bar{U}$.
 $\hat{f}$ ist NICHT holomorph; es sei denn
 $f'(z) = 0 \forall z \in U$.

iii) Sei $\bar{f}: U \rightarrow \mathbb{C}$, $\bar{f}(z) := \overline{f(z)} \forall z \in U$.
 $\bar{f}: U \rightarrow \mathbb{C}$ ist NICHT holomorph, es sei
 denn $f'(z) = 0 \forall z \in U$.

Beweis: i): $\left(\overline{f(\bar{z}+h)} - \overline{f(\bar{z})} \right) / h$

$$= \overline{f(\bar{z}+h) - f(\bar{z})} / \bar{h}$$

$$= \overline{(f(\bar{z}+h) - f(\bar{z})) / \bar{h}}$$

$$\rightarrow \overline{f'(\bar{z})} \quad \text{für } h \rightarrow 0, \text{ da}$$

$$h \rightarrow 0 \Rightarrow \bar{h} \rightarrow 0.$$

ii) n.A.

iii) Annahme: $\exists z$ mit $f'(z) = 0$. Falls $\bar{f}: U \rightarrow \mathbb{C}$
 holomorph ist, dann gilt $\check{f}: \bar{U} \rightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph

(von i)). Aber $\check{f}(a) = \overline{\bar{f}(\bar{a})} = \overline{f(a)} = f(a) = \hat{f}(a)$
 $\forall a \in \bar{U} \Rightarrow \check{f} \text{ holomorph.} \Rightarrow \text{zu ii).}$

- 15 -

Def. 3.5: $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ heißt anti-holomorph
falls $\bar{f}: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist.

Dadurch ist z.B. $f(z) := \bar{z}$ anti-holomorph.

($f(z) = \bar{\bar{z}} = z$ ist holomorph).

4. Die Cauchy-Riemann Gleichungen.

4.1 Sei $f: U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $U \ni z \mapsto f(z) \in \mathbb{C}$.

Seien $u: U \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x,y) = \operatorname{Re}(f(x+iy))$,

$v: U \rightarrow \mathbb{R}$, $v(x,y) = \operatorname{Im}(f(x+iy))$, d.h.

$$f(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y) \quad \forall x+iy \in U. \quad (*)$$

Sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in z_0 .

$c = a+ib \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Sei $h_n = \varepsilon_n + i \cdot 0 = \varepsilon_n$
mit $\varepsilon_n \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $\varepsilon_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt: