1. Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen:

Sei $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ der reeller Vektorraum,

$(x,y)a + (z,w)b = (ax+bz, ay+bw) \ \forall a,b,x,y,z,w \in \mathbb{R}$.

Auf $\mathbb{R}^2$ definieren '$\cdot$' durch:

$$\boxed{(x,y)\cdot(z,w) := (xz-yw, xw+yz) \qquad (1.1)}$$

__Defn. 1.1__ $(\mathbb{C},+,\cdot) := (\mathbb{R}^2,+,\cdot)$.

Man weist nach: $+$ und $\cdot$ sind assoziativ und kommutativ. D.h.

$$(a+b)+c = a+(b+c), \quad a+b = b+a, \quad \forall a,b,c \in \mathbb{C} \quad (1.2)$$

$$(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c), \quad a\cdot b = b\cdot a, \quad \forall a,b,c \in \mathbb{C}. \quad (1.3)$$

Weiterhin gilt:

i) $(\mathbb{C},+)$ ist eine Gruppe (mit neutralen element $0_{\mathbb{C}} = (0,0)$)

ii) $(\mathbb{C}\setminus\{0_{\mathbb{C}}\},\cdot)$ eine Gruppe (" " $1_{\mathbb{C}} = (1,0)$)

iii) Es gilt das Distributivgesetz:

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad \forall a,b,c \in \mathbb{C}$$

Dadurch ist $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ein Körper.

<u>Erinnerung 1.2</u>: $(K, +, \cdot)$ ist ein Körper falls a) $+, \cdot$ sind assoziativ und kommutativ
b) i), ii) und iii) von oben gelten.

<u>Definition 1.3</u>: $i := (0,1)$.

Für $x, y \in \mathbb{R}$, $(x,y) \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned}(x,y) &= (x,0) + (0,y) \\ &= (x,0) + (0,1)\cdot y \\ &= (x,0) + i\cdot y \qquad (1.4)\end{aligned}$$

<u>Notation 1.4</u> Für $x, y \in \mathbb{R}$ ist

$x + iy \in \mathbb{C}$ der Element $(x,y) = (x,0) + i\cdot y \in \mathbb{C}$.

Mit dieser Notation gilt:

$$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) \overset{(1)}{=} (-1, 0) = -1 + i\cdot 0 \in \mathbb{C} \quad (1.5)$$

<u>und</u> $(x+iy)\cdot(z+iw) = xz - yw + i(yz + wx)$

$$\forall x, y, z, w \in \mathbb{R}.$$

Die Menge $K := \{x + i \cdot 0 \in \mathbb{C} \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$

ist auch ein körper mit $+, \cdot$ wie oben definiert,
d.h. K ist ein unterkörper von $\mathbb{C}$.
~~Kor~~ ist ~~t~~ körperisometrisch ~~zu~~ $\mathbb{R}$ durch:

$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto x + i \cdot 0 \in K \subseteq \mathbb{C}.$$

Notation 1.5 : jedes element $x \in \mathbb{R}$ wird auch als element $x \in \mathbb{C}$ verstanden durch

$$\mathbb{R} \ni x \longrightarrow x + i \cdot 0 \in \mathbb{C}.$$

Mit dieser Natation kann man (1.5)

neu schreiben als

$$\boxed{i^2 = -1 \qquad (\tilde{1.5})}$$

Definition 1.6 :

$$\left.\begin{aligned} Re\,(x+iy) &:= x \in \mathbb{R}, \\ Im\,(x+iy) &:= y \in \mathbb{R}, \end{aligned}\right\} \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$a^{Re} = Re(a), \quad a^{Im} = Im(a) \quad \forall\, a \in \mathbb{C},$$

$$\overline{x+iy} := x - i \cdot y \in \mathbb{C}$$

$$\langle z,w\rangle_{\mathbb{C}} := \bar{z}\cdot w \in \mathbb{C} \quad \forall z,w\in\mathbb{C},$$

$$\langle z,w\rangle := \langle z,w\rangle_{\mathbb{R}} = \mathrm{Re}\,(\bar{z}\cdot w) \in \mathbb{R} \ \forall z,w\in\mathbb{C},$$

$$|z| := \sqrt{\langle z,z\rangle} \quad \in \mathbb{R}_0^+ \quad \forall z\in\mathbb{C}.$$

wir zeigen gleich, dass $\langle z,z\rangle \geq 0 \quad \forall z\in\mathbb{C}$.

<u>Lemma 1.7</u>:

a) $\bar{\bar{z}} = z$, $\overline{a\cdot b} = \bar{a}\cdot\bar{b} \quad \forall z,a,b\in\mathbb{C}$

b) $\mathrm{Re}\,(z) = \mathrm{Re}\,(\bar{z}) \quad \forall z\in\mathbb{C}$

c) $\langle z,w\rangle = \langle w,z\rangle \quad \forall w,z\in\mathbb{C}$, und

d) $\langle z,z\rangle \geq 0 \quad \forall z\in\mathbb{C}$ und es gilt

$$|x+iy| = \sqrt{x^2+y^2} =: |(x,y)|_{\mathbb{R}^2}$$

$\forall x,y\in\mathbb{R}$.

e) $|z| = 0 \Leftrightarrow z=0 \quad \forall z\in\mathbb{C}$

f) $|w\cdot z| = |w|\,|z| \quad \forall w,z\in\mathbb{C}$

g) Dreiecksungleichung: $|w+z| \leq |w|+|z|$

Polarisierungsidentität. $\quad \forall w,z\in\mathbb{C}$
$|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\langle z,w\rangle$

Beweis: a), b) : $\overline{\left(\overline{x+iy}\right)} = \overline{x-iy} = x+iy$;

$$\mathrm{Re}(x+iy) = x = \mathrm{Re}(x-iy) = \mathrm{Re}(\overline{x+iy}) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

$$\overline{(x+iy)} \cdot \overline{(r+is)} = (x-iy) \cdot (r-is)$$

$$= (xr - ys) - i(yr + sx).$$

$$\overline{(x+iy)\cdot(r+is)} = \overline{(xr-ys) + i(yr+sx)}$$

$$= (xr-ys) - i(yr+sx).$$

$$= \overline{(x+iy)} \cdot \overline{(r+is)}$$

$$\forall x,y,r,s \in \mathbb{R}.$$

c) $\langle z,w\rangle = \mathrm{Re}(\bar{z}\cdot w) = \mathrm{Re}(\overline{\bar{z}\cdot w})$

$$= \mathrm{Re}(z\cdot\bar{w})$$

$$= \mathrm{Re}(\bar{w}\cdot z)$$

$$= \langle w,z\rangle.$$

Rest : Ähnlich.

$\blacksquare$

2. Der metrische Raum $\mathbb{C}$

Definition 2.1 $d_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$d_{\mathbb{C}}(z,w) := |z-w| \text{, wobei } |\cdot| \text{ in D.1.6 ist.}$$

Lemma 2.2 $d_{\mathbb{C}}$ ist eine Metrik auf $\mathbb{C}$:

für $z, w, u \in \mathbb{C}$ gilt:

a) $d_{\mathbb{C}}(z,u) = d_{\mathbb{C}}(u,z)$,

b) $d_{\mathbb{C}}(z,u) \geq 0$ mit "$=0$" $\Leftrightarrow z = u$,

c) $d_{\mathbb{C}}(z,w) \leq d_{\mathbb{C}}(z,u) + d_{\mathbb{C}}(u,w)$ (Dreiecksungl.)

Beweis: a) von Def. von $d_{\mathbb{C}}$. b) Def. von $d_{\mathbb{C}}$ und e) von Lemma 1.7. c) von g) Lemma 1.7 und Def. von $d_{\mathbb{C}}$.

Definition / Notation/Tatsachen 2.3: (X,d) ist ein metrischer Raum, heißt $d : X \times X \to \mathbb{R}_0^+$, und a), b), c) (mit $d_{\mathbb{C}}$ durch d ersetzt) gelten $\forall\, z, w, u \in X$. (Bem: brauchen kein $+$ oder $\cdot$ um metrische Räume zu definieren).

- ${}^{d}B_r(a) := \{ z \in X \mid d(z,a) < r \}$
- ${}^{d}\overline{B_r(a)} := \{ z \in X \mid d(z,a) \leq r \}$

- Falls d klar ist, dann schreiben wir

$B_r(a)$ bzw. $\overline{B_r(a)}$.

- $\mathcal{U} \subseteq X$ ist <u>offen</u> falls $\forall\ p \in \mathcal{U}$, $\exists\ \delta > 0$, so dass $B_\delta(p) \subseteq \mathcal{U}$.

- Für eine Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in X$, $a \in X$,

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \quad , \text{falls} \quad d(a_n, a) \xrightarrow{n\to\infty} 0 .$$

- Dies ist äquivalent zu: $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so daß $a_n \in B_\varepsilon(a)$ $\forall\ n \geq N$.

- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ in (X, d) ist Cauchy, falls $\forall\ \varepsilon > 0$ $\exists\ N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $d(a_n, a_m) < \varepsilon$ $\forall n, m \geq N$.

- Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume.

$f: X \to Y$ stetig ~~in $x \in X$~~, falls $\forall\ (x_n)_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in X$, mit $x_n \to x \in X$, gilt

$$f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) .$$

<u>D.h.</u> $\forall (x_n)_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in X$ mit $d_X(x_n, x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

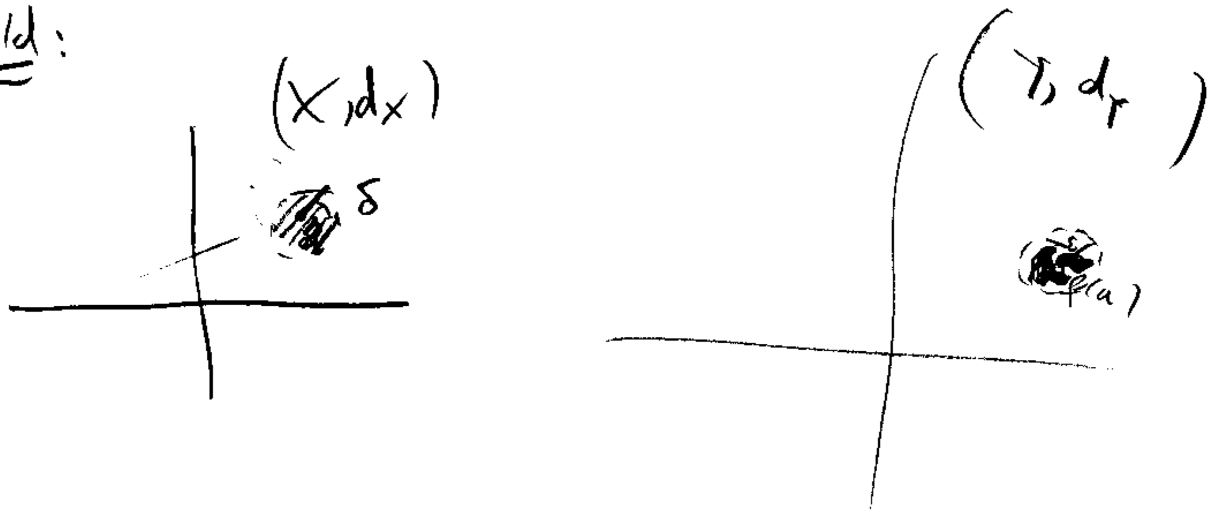
gilt $$d_Y(f(x_n), f(x)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

• Dies ist äquivalent zu $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, so daß

$$f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x)).$$

$$\left(Y \subseteq X, \quad f(Y) = \{ f(y) \mid y \in Y \} \right).$$

Bild:



wie schon gesehen in Lemma 1.7 d) gilt $\forall r, s, x, y \in \mathbb{R}$,

$$d_{\mathbb{C}}(x+iy, r+is) = d_{\mathbb{R}^2}((x,y),(r,s)).$$

$$= \sqrt{(x-r)^2 + (y-s)^2}.$$

$\Rightarrow$

Dadurch sehen wir: Fürs $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a \in \mathbb{C}$ mit $a_n = x_n + iy_n$, $a = x + iy$, $x_n, y_n, x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \iff d_{\mathbb{C}}(a_n, a) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\iff d_{\mathbb{C}}(x_n + iy_n, x + iy) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\iff d_{\mathbb{R}^2}((x_n, y_n),(x,y)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x_n-x)^2+(y_n-y)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\Leftrightarrow$ $x_n \to x$ und $y_n \to y$ in $\mathbb{R}$ (2.1).

weiterhin gilt: ${}^{d_{\mathbb{R}^2}}B_r((x,y)) = {}^{d_{\mathbb{C}}}B_r(x+iy)$.

Defn. 2.4: Für $f: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$, $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$,

$f^{Im}: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ und $f^{Re}: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ sind

$f^{Re}(z) := Re(f(z))$, und $f^{Im}(z) := Im(f(z))$.

Es gilt: $f = f^{Re} + i f^{Im}$.

Von ${}^{\mathbb{R}^2}d = {}^{\mathbb{C}}d$ sehen wir: Für $\mathcal{U}$ offen, $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$,

$f: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ ist stetig in $z = x+iy \in \mathcal{U}$

$\Leftrightarrow$ $\tilde{f}: \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist stetig in $(x,y) \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$,

wobei hier $\tilde{f}((a,b)) := \left(f^{Re}(a+ib), f^{Im}(a+ib)\right)$

$\forall (a,b) \in \mathcal{U}$. Wir nennen $\tilde{f}$ die reele Fn. die zu f assoziert ist.

Propn 2.5: Diese Aussagen gelten in $\mathbb{C}$.

a) $(\mathbb{C}, d_{\mathbb{C}})$ ist vollständig (d.h. jede Cauchy Folge konvergiert).

b) Seien $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ Folgen in $\mathbb{C}$.

i) $a_n \to a$ in $\mathbb{C}$, $b_n \to b$ in $\mathbb{C} \Rightarrow a_n b_n \to ab$ in $\mathbb{C}$

ii) $a_n \to a$ in $\mathbb{C}$, $b_n \to b \neq 0$ in $\mathbb{C} \Rightarrow (a_n/b_n) \to (a/b)$ in $\mathbb{C}$

((a_n/b_n) ist wohldefiniert $\forall n \geq N$ für $N \in \mathbb{N}$ gross genug).

iii) $a_n \to a \in \mathbb{C} \Rightarrow |a_n| \to |a|$ in $\mathbb{R}$.

iv) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ in $\mathbb{C}$ und $|a_n| \leq K < \infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (K eine Konstante) 10—

$\Rightarrow \exists$ Teilfolge $(a_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ von $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ und ein $a \in \mathbb{C}$ mit

$a_{n_j} \xrightarrow{j \to \infty} a \in \mathbb{C}$.

3 Holomorphe Funktionen:

Def. 3.1: Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z \in U$. $f: U \to \mathbb{C}$

heißt komplex differenzierbar in z, falls

$$\lim_{0 \neq h \to 0} \frac{f(z+h) - f(h)}{h} \text{ existiert.}$$

Bemerkung 1: U offen $\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ so dass, $z+h \in U$

$\forall h \in \mathbb{C}$ mit $|h| < \varepsilon$. D.h. $f(z+h)$ in Def. ist

wohldefiniert.

Bemerkung 2: Der Grenzwert "existiert" $\Rightarrow$:

$\exists\, a \in \mathbb{C}$, so dass $\forall$ Folgen $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ in $\mathbb{C}$

mit $h_n \neq 0 \, \forall n \in \mathbb{N}$ und $h_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$ gilt:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(z+h_n) - f(h_n)}{h_n} = a.$$

Definition 3.1 fortgesetzt: Falls $f: U \to \mathbb{C}$

komplex differenzierbar in z ist, dann ist

$$f'(z) := \lim_{0 \neq h \to 0} \frac{f(z+h) - f(h)}{h}. \quad (3.1)$$

Falls $f: U \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in z $\forall z \in U$

ist, dann heißt $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph.

$f': U \to \mathbb{C}$ ist dann durch (3.1) definiert.

Bemerkung 3: $f'(z) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(h)}{h}$ existiert

ist äquivalent zu: $\exists$ $b \in \mathbb{C}$ mit

$$f(z+h) - f(z) = b \cdot h + \varphi_z(h)$$

wobei $\varphi_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, und

$\frac{\varphi_z(h)}{h} \xrightarrow{h \to 0} 0$: ($\Leftarrow$) setze $f'(z) := b \ldots$

($\Rightarrow$) setze $\varphi_z(h) := f(z+h) - f(z) - f'(z) \cdot h$ und $b := f'(z)$.

Insbesondere, dies impliziert, dass

$\lim\limits_{h \to 0} f(z+h) - f(z) = 0$, d.h.

Lemma 3.2: $\mathcal{U}$ offen und $f : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist komplex diff. in $z \in \mathcal{U}$ $\Rightarrow$ f ist stetig in z.

3.3 Beispiele i) $f: U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$, $f(z) := a$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

$$\frac{f(z+h) - f(h)}{h} = \frac{a-a}{h} = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \ \forall h \in \mathbb{C}, \ h \neq 0,$$

$$\Rightarrow f'(z) = 0. \ \forall z \in U \Rightarrow f \text{ holomorph mit } f': U \to \mathbb{C} \text{ ist } f'(z) = 0 \ \forall z \in U.$$

ii) $f: U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{z+h-z}{h} = 1 \Rightarrow f \text{ ist holomorph mit}$$

$f': U \to \mathbb{C}$ ist $f'(z) = 1 \ \forall z \in \mathbb{C}$.

iii) Ähnlich zeigt man für $f: U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n \quad \text{wobei } a_n \in \mathbb{C} \text{ für } n \in \{1, \dots, N\}.$$

$f: U \to \mathbb{C}$ ist hol. mit $f'(z) = \sum_{n=1}^{N} n a_n z^{n-1}$.

iv) ÜA: $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z}$ ist holomorph,

$$f'(z) = -\frac{1}{z^2}$$

v) $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := \overline{z}$ ist NICHT holomorph. Da: sei $z \in \mathbb{C}$ beliebig.

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{\overline{z+h} - \overline{z}}{h} = \frac{\overline{h}}{h}.$$

Für Folgen $h_n = \frac{1}{n} + i\cdot 0 = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \in \mathbb{C}$ ist

$$\frac{f(z+h_n)-f(z)}{h_n} = \frac{\overline{(1/n)}}{(1/n)} = \frac{(1/n)}{(1/n)} = 1 \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

Für Folgen $h_n = i\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ in $\mathbb{C}$ ist

$$\frac{f(z+h_n)-f(z)}{h_n} = \frac{\overline{h_n}}{h_n} = \frac{\overline{(i/n)}}{(i/n)} = \frac{-i/n}{i/n} = -1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -1.$$

D.h. $\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(h)}{h}$ existiert NICHT

(siehe Bemerkung 2).

Erinnerung

Die Fn. $\tilde{f} : U \to \mathbb{R}^2$ die zu $f : U \to \mathbb{C}$ assoziiert ist, ist $\tilde{f}((x,y)) := \left(f^{Re}(x+iy), f^{Im}(x+iy)\right)$

In diesem Fall ist $f(x+iy) = x - iy \Rightarrow f^{Re}(x+iy) = x$, $f^{Im}(x+iy) = -y$

$$\Rightarrow \tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \tilde{f}(x,y) = \left(f^{Re}(x+iy), f^{Im}(x+iy)\right)$$

$$= (x, -y).$$

Diese Fn. ist unendlich mal reel differenzierbar überall in $\mathbb{R}^2$.

<u>D.h.</u> $\tilde{f} : U \to \mathbb{R}^2$ reel differenzierbar

$$\not\Rightarrow f : U \to \mathbb{C} \text{ differenzierbar}$$

(wie dieses Beispiel zeigt).

umgekehrt ist aber richtig: <u>Satz 3.3</u>: $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex diff. in $\underset{=x+iy}{z} \Rightarrow \tilde{f} : U \to \mathbb{R}^2$ (die ~~reellen~~ Fn. zu f assoziiert) ist diff. in $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

<u>ÜA</u>: $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph, $U \subset \mathbb{C}$

$g : V \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph, U, V offen,

$\Rightarrow f \circ g : V \cap g^{-1}(U) \to \mathbb{C}$ holomorph, und es gilt:

$$(f \circ g)'(z) = f'(g(z)) \cdot g'(z)$$

$$\boxed{\text{Es gilt auszurechnen.} \quad D\tilde{f}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}(x,y).}$$

<u>Satz 3.4</u>: Sei $f: \mathcal{U} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph, woofa.

Dann gilt:

i) $\check{f}: \overline{\mathcal{U}} \to \mathbb{C}$ <u>ist</u> holomorph, wobei

$\overline{\mathcal{U}} = \{ \bar{z} \mid z \in \mathcal{U} \}$, $\check{f}(z) := \overline{f(\bar{z})} \ \forall z \in \overline{\mathcal{U}}$.

ii) sei $\hat{f}: \overline{\mathcal{U}} \to \mathbb{C}$, $\hat{f}(z) := f(\bar{z}) \ \forall z \in \overline{\mathcal{U}}$.

$\hat{f}$ ist NICHT holomorph, es sei denn

$f'(z) = 0 \quad \forall z \in \mathcal{U}$.

iii) Sei $\bar{f}: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$, $\bar{f}(z) := \overline{f(z)} \ \forall z \in \mathcal{U}$.

$\bar{f}: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ ist NICHT holomorph, es sei denn $f'(z) = 0 \quad \forall z \in \mathcal{U}$.

<u>Beweis</u>: i):
$$\left(\overline{f(\overline{z+h})} - \overline{f(\bar{z})} \right) / h$$
$$= \overline{f(\overline{z+h}) - f(\bar{z})} / \bar{h}$$
$$= \overline{\left(f(\bar{z} + \bar{h}) - f(\bar{z}) \right) / \bar{h}}$$
$$\to \overline{f'(\bar{z})} \quad \text{für } h \to 0, \text{ da}$$

$h \to 0 \Rightarrow \bar{h} \to 0$.

ii) ÜA.

iii) Annahme: $\exists z$ mit $f'(z) = 0$. Falls $\bar{f}: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ holomorph ~~ist~~, dann gilt $\check{\bar{f}}: \overline{\mathcal{U}} \to \mathbb{C}$ ist holomorph (von (i)). Aber $\check{\bar{f}}(a) = \overline{\bar{f}(\bar{a})} = \overline{\overline{f(\bar{a})}} = f(\bar{a}) = \hat{f}(a)$ $\forall a \in \overline{\mathcal{U}} \Rightarrow \hat{f}$ holomorph. $\lightning$ zu ii).

Def. 3.5: $f: U \to \mathbb{C}$ heißt anti-holomorph falls $\bar{f}: U \to \mathbb{C}$ holomorph ist.

Dadurch ist z.B. $f(z) := \bar{z}$ antiholomorph.

($f(z) = \bar{\bar{z}} = z$ ist holomorph).

4. Die Cauchy-Riemann Gleichungen.

4.1 Sei $f: U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, U offen $\subseteq \mathbb{C}$.

Seien $u: U \to \mathbb{R}$, $u(x,y) = \mathrm{Re}(f(x+iy))$,

$v: U \to \mathbb{R}$, $v(x,y) = \mathrm{Im}(f(x+iy))$, d.h.

$$f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y) \quad \forall\, x+iy \in U. \quad (*)$$

Sei $f: U \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in $c = a+ib \in \mathbb{C}$, $a,b \in \mathbb{R}$. Sei $h_n = \varepsilon_n + i \cdot 0 = \varepsilon_n$ mit $\varepsilon_n \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$, $\varepsilon_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt: