

-17-

$$\frac{f(z+h_n) - f(c)}{h_n} = \frac{f(a+ib+\varepsilon_n) - f(a+ib)}{\varepsilon_n}$$

$$= \frac{u(a+\varepsilon_n, b) + i v(a+\varepsilon_n, b) - (u(a, b) + i v(a, b))}{\varepsilon_n}$$

(wegen (*))

$$= \underbrace{\frac{u(a+\varepsilon_n, b) - u(a, b)}{\varepsilon_n}}_{(I_n)} + i \underbrace{\left(\frac{v(a+\varepsilon_n, b) - v(a, b)}{\varepsilon_n} \right)}_{(II_n)}$$

$n \rightarrow \infty$
 $\rightarrow f'(c) (= \operatorname{Re}(f'(c)) + i \operatorname{Im}(f'(c)))$
 da f komplex differenzierbar in c ist.

D.h.
 $\Rightarrow (I_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(f'(c)) \in \mathbb{R}$ und

$(II_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(f'(c)) \in \mathbb{R}$.

D.h. die partielle Ableitung $\frac{\partial u}{\partial x}(a, b)$ existiert
 in (a, b) und die partielle Ableitung $\frac{\partial v}{\partial x}(a, b)$ existiert
 in (a, b) und es gilt:

$$f'(a+ib) = \frac{\partial u}{\partial x}(a, b) + i \frac{\partial v}{\partial x}(a, b). \quad (4.11)$$

Aber für $h_n := \alpha i \varepsilon_n$ & $\varepsilon_n \rightarrow 0$ gilt: (ähnliche Rechnung)

$$\frac{f(z+h_n) - f(z)}{h_n}$$

$$= \left(\frac{u(a, b+\varepsilon_n) - u(a, b)}{i \varepsilon_n} \right) + i \left(\frac{v(a, b+\varepsilon_n) - v(a, b)}{i \varepsilon_n} \right)$$

$$= -i \left(\frac{u(a, b+\varepsilon_n) - u(a, b)}{\varepsilon_n} \right) + \left(\frac{v(a, b+\varepsilon_n) - v(a, b)}{\varepsilon_n} \right)$$

$\Rightarrow f'(c) = \operatorname{Re}(f'(c)) + i \operatorname{Im}(f'(c))$ da f komplex diff. in c ist.

$\Rightarrow$ die partielle Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial y}(a, b)$ und

$\frac{\partial v}{\partial x}(a, b)$ in (a, b) existieren, und

$$f'(a+ib) = f'(c) = \frac{\partial v}{\partial y}(a, b) - i \frac{\partial u}{\partial y}(a, b) \quad (4.2)$$

Aber (8) und (9) implizieren

Die Cauchy-Riemann Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial v}{\partial y}(a, b) \quad \text{und} \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(a, b) = -\frac{\partial u}{\partial y}(a, b) \quad \forall (a, b) \in \mathcal{U}$$

Satz 3.3 (ergänzt).

-19-

Seien $f: U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $g: V \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph,

U, V offen. Dann gilt:

a) $f+g: U \cap V \rightarrow \mathbb{C}$, $f \cdot g: U \cap V \rightarrow \mathbb{C}$ sind holomorph mit $(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z)$ und

$$(f \cdot g)'(z) = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z) \quad \forall z \in U \cap V.$$

b) falls $g(z) \neq 0 \quad \forall z \in V$, dann ist $f/g: U \cap V \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $(f/g)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$

c) $f \circ g: V \cap g^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $(f \circ g)'(z) = f'(g(z)) \cdot g'(z) \quad \forall z \in V \cap g^{-1}(U)$

d) $\tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\tilde{f}(x,y) = (f^{\text{re}}(x+iy), f^{\text{im}}(x+iy))$

ist differenzierbar mit

$$D\tilde{f}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{f}^1}{\partial x} & \frac{\partial \tilde{f}^1}{\partial y} \\ \frac{\partial \tilde{f}^2}{\partial x} & \frac{\partial \tilde{f}^2}{\partial y} \end{pmatrix} (x,y)$$

• die $\tilde{f}^1, \tilde{f}^2: U \rightarrow \mathbb{R}$ sind durch

$$\tilde{f}(x,y) = (\tilde{f}^1(x,y), \tilde{f}^2(x,y)) \text{ gegeben.}$$

ü4 Blatt 1 / Blatt 2

4.2 ^{Cauchy-Riemann Gleichungen ... weiter} Beziehung zu harmonischen Abbildungen. -20-

Sei $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(U, \mathbb{R})$, U offen.
Def. 4.3

Laplace von f ist

$$\Delta f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Delta f(x) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2}$$

f heißt harmonisch falls $\Delta f \equiv 0 \forall x \in U$.

Sei $f: U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ holomorph mit

$f(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y)$, und setze weiterhin voraus,

dass $u, v: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \in C^2(U, \mathbb{R})$ sind.

Von den Cauchy-Riemann Gleichungen sehen wir, dass

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &\stackrel{(CR)}{=} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ähnlich $\Delta v = 0$. Also $u, v: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sind

beide harmonisch.

4.4 (iA) Sei $f: U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y)$,

$u, v: U \rightarrow \mathbb{R} \in C^1(U, \mathbb{R})$. Falls $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ und $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ in U gilt, dann ist $f: U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$
 $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial z} (u + i v)$

-21-

$$\text{mit } f'(z) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

$$= \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \quad \forall z = x+iy \in U.$$

5 Reihen in $\mathbb{A}$

Def 5.1
Seien $a_n \in \mathbb{A}, n \in \mathbb{N}$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (zuerst formalsumme)
heißt konvergent, falls die Folge

$$(S_\ell)_{\ell=1}^{\infty}, \quad S_\ell := \sum_{i=0}^{\ell} a_i, \text{ konvergiert in } \mathbb{A}.$$

Im konvergenz Fall wird $\lim_{\ell \rightarrow \infty} S_\ell$ mit

$$S \sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim_{\ell \rightarrow \infty} S_\ell \text{ bezeichnet.}$$

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent,

falls $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Wie in $\mathbb{R}$ gilt:

Satz 5.2: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert.

Beweis: $\tilde{S}_\ell := \sum_{i=0}^{\ell} |a_i| \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} r \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$(\tilde{S}_\ell)_{\ell=1}^{\infty}$ Cauchy in $\mathbb{R} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$|\tilde{S}_n - \tilde{S}_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$$

Für $S_n = \sum_{i=0}^n a_i$ gilt somit:

- 23 -

$$|S_n - S_m| = \left| \sum_{i=n+1}^m a_i \right| \quad \text{für } n \geq m$$

$$\leq \sum_{i=m+1}^n |a_i| = |\tilde{S}_n - \tilde{S}_m| < \varepsilon$$

$$\forall n, m \geq N.$$

D.h. $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ Cauchy. & vollständig

$\Rightarrow S_n$ konvergiert. ~~■~~

Def. 5.3 : Für $a, a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$ heißt

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ eine Potenzreihe (Zuerst Formell).

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ heißt konvergent in $p \in \mathbb{C}$ falls

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (p-a)^n$ konvergiert, d.h.

$S_\ell := \sum_{n=0}^{\ell} a_n (p-a)^n$ erfüllt $S_\ell \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} s$ für ein $s \in \mathbb{C}$.

Der Konvergenzradius R von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ ist

$$R := \begin{cases} \infty & , \text{ falls } \limsup_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{|a_n|}) = 0 \\ 0 & , \text{ falls } \limsup_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{|a_n|}) = \infty \\ \frac{1}{\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)} & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Satz 5.4: Seien a, a_n, R wie in Defn. 5.3

a) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ konvergiert absolut, gleichmäßig

auf $\overline{B_p(a)}$ für $p < R$.

b) Sei $f: B_R(a) \rightarrow \mathbb{C}$ durch $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$.

Dann gilt: f ist holomorph auf $B_R(a)$ und $f', f'', \dots$ sind auch holomorph auf $B_R(a)$.

Es gilt:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-a)^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} \cdot (z-a)^n. \end{aligned}$$

o.B.d.A. ist $a=0$ (sonst untersuche $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, g(z) := f(z+a)$).

a) Wie im Fall $\mathbb{R}$: Sei $|z| \leq p < R$, und $\theta = \frac{p}{R} (< 1)$.

Angenommen $0 < R < \infty$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Sei $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sqrt[n]{\varepsilon \cdot R} \leq \frac{1}{|a_n|^{1/n}} \quad \forall n \geq N \quad \left(\text{möglich da } \left(\sup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|a_n|^{1/n}} \right) = R > \sqrt[n]{\varepsilon \cdot R} \right) \quad \text{da } \theta < 1$$

$$\text{Dann gilt: } \sum_{n=l}^m |a_n z^n| = \sum_{n=l}^m \left(R |a_n|^{1/n} \frac{|z|}{R} \right)^n$$

$$\leq \sum_{n=l}^m \left(\frac{1}{\sqrt{\theta}} \cdot \frac{|z|}{R} \right)^n \quad \# l \geq N \text{ (da } n \geq l)$$

$$\leq \sum_{n=l}^m \left(\frac{1}{\sqrt{\theta}} \cdot \frac{\theta}{R} \right)^n, \text{ da } \frac{|z|}{R} \leq \frac{\rho}{R} = \theta;$$

$$= \sum_{n=l}^m (\theta^{\frac{1}{2}})^n = (\theta^{\frac{1}{2}})^l \sum_{n=0}^{m-l} (\theta^{\frac{1}{2}})^n$$

$$\leq (\theta^{\frac{1}{2}})^l \cdot \left(\frac{1}{1-\theta^{\frac{1}{2}}} \right)$$

$$\leq \varepsilon \quad (\text{da } 0 < \theta < 1)$$

$$\# l \geq M(\theta).$$

D.h. $\sum_{n=l}^m |a_n z^n| < \varepsilon \quad \# l \geq \min(M, N) \leq \tilde{M}(\varepsilon)$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \text{ ist Cauchy.}$$

$$\Rightarrow \tilde{S}_l \rightarrow \tilde{S} \text{ f\"ur ein } \tilde{S} \in S.$$

Weiterhin gilt:

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| - \sum_{n=0}^l |a_n z^n| \right|$$

$$= \left| \sum_{n=l+1}^{\infty} |a_n z^n| \right|$$

$$< \varepsilon \quad \# l \geq \tilde{M} \quad \# z \text{ mit } |z| \leq \rho \text{ (wegen } (\#)) \text{ gleichm\"assig.}$$

D.h. die Konvergenz ist

b)

Schritt 1

von Satz 5.4:

Zwei Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(n+1) a_{n+1}}_{=: b_{n+1}} z^n \right)$
 haben konvergenz Radius R und S . Es gilt $R = S$.

$$\left(\frac{1}{R} \right) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \quad |$$

$$\left(\frac{1}{S} \right) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|}$$

$$= \limsup_{n \rightarrow \infty} (n+1)^{\frac{1}{n}} \cdot |a_{n+1}|^{\frac{1}{n}}$$

$$= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(|a_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}} \right)^{\frac{n+1}{n}} \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\left(\text{jeder Wert von } \limsup_{n \rightarrow \infty} |r_n| = m \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} |r_n|^{\frac{1}{n}} = m \right)$$

für beliebige $|r_n| \in \mathbb{R}$,

$$= \frac{1}{R}$$

b. D. h. $f_1(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m^1(z)$
 konvergiert absolut $\forall |z| < R \Rightarrow$ konvergiert absolut

gleichmäßig auf $B_p(0)$ $\forall p < R$.

$$\text{Hier ist } S_m(z) = \sum_{n=0}^m a_n z^n \Rightarrow n! \rightarrow 0$$

Schritt 2: f ist komplex differenzierbar in z

und $f_1(z) = f'(z)$

Beweis: Sei $\rho > 0$ mit $|z| = \tilde{\rho} < \rho \in \mathbb{R}$ Sei $\varepsilon > 0$ gegeben

: Es gilt für h mit $|h| < \frac{\rho - \tilde{\rho}}{2}$, $|z+h| \leq |z| + |h| < \rho$

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f_1(z) \leq \tilde{\rho} + \frac{\rho - \tilde{\rho}}{2} = \frac{\tilde{\rho}}{2} + \frac{\rho}{2} < \rho.$$

$$= \frac{S_n(z+h) - S_n(z)}{h} + \frac{R_n(z+h) - R_n(z)}{h} - f_1(z)$$

$$= \underbrace{\left(\frac{S_n(z+h) - S_n(z)}{h} - S_n'(z) \right)}_{\text{I}} + \underbrace{\left(\frac{R_n(z+h) - R_n(z)}{h} \right)}_{\text{II}} + \underbrace{\left(S_n'(z) - f_1(z) \right)}_{\text{III}}$$

$$= \text{(I)} + \text{(II)} + \text{(III)}.$$

Der 2te Term (II) kann man als

$$\left(\frac{R_n(z+h) - R_n(z)}{h} \right) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \left((z+h)^{k-1} + (z+h)^{k-2} + \dots + (z+h)z + z^{k-1} \right)$$

umschreiben.

$$(ii) \quad (a-b) \sum_{k=n}^r d_k (a^{k-1} + a^{k-2} \cdot b + \dots + b^{k-1}) \quad \rightarrow 29$$

$$= \sum_{k=n}^r d_k (a^k - b^k).$$

$$\text{Setze } a = z+h, \quad b = z \Rightarrow h = (a-b)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{R_n(z+h) - R_n(z)}{h} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} k |d_k| p^{k-1}, \text{ da}$$

$$|z+h| \leq p \text{ und } |z| \leq p.$$

$$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ so dass}$$

$$\left| \frac{R_n(z+h) - R_n(z)}{h} \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall z \in \overline{B_p(0)},$$

$$\text{da } \sum_{k=0}^{\infty} k |d_k| p^{k-1} \text{ konvergiert (siehe Schritt 1).}$$

$$(\underline{p < R})$$

$$S_n'(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f_1(z) \quad \text{von Schritt 1}$$

$$\Rightarrow \exists n_1 > 0 \text{ s.t. } |S_n'(z) - f_1(z)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_1$$

Sei $n_0 = \max(n_0, n_1)$.

$$S_n \text{ ist holomorph} \Rightarrow \exists \delta(n) > 0 \text{ so dass } |h| < \delta(n)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{S_n(z+h) - S_n(z)}{h} - S_n'(z) \right| < \varepsilon \quad \forall |h| \leq \delta(n)$$

$$\text{d.h. } \forall h \neq 0 \text{ mit } |h| \leq \min(\delta(n), \frac{p-\tilde{p}}{2}) \text{ gilt}$$

$$\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f_1(z) \right| \leq 3\varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

□