$$\frac{f(c+h_n)-f(c)}{h_n} = \frac{f(a+ib+\varepsilon_n)-f(a+ib)}{\varepsilon_n}$$

$$= \frac{u(a+\varepsilon_n,b)+iv(a+\varepsilon_n,b)-(u(a,b)+iv(a,b))}{\varepsilon_n}$$

(wegen (*))

$$= \underbrace{\frac{u(a+\varepsilon_n,b)-u(a,b)}{\varepsilon_n}}_{\stackrel{!}{=}(I_n)} + i\underbrace{\left(\frac{v(a+\varepsilon_n,b)-v(a,b)}{\varepsilon_n}\right)}_{\stackrel{!!}{=}(II_n)}.$$

$\xrightarrow{n\to\infty} f'(c)$ $\left(= \operatorname{Re}(f'(c)) + i\operatorname{Im}(f'(c))\right)$

da f komplex differenzierbar in c ist.

D.h.

$\Rightarrow (I_n) \xrightarrow{n\to\infty} \operatorname{Re}(f'(c)) \in \mathbb{R}$ und

$(II_n) \xrightarrow{n\to\infty} \operatorname{Im}(f'(c)) \in \mathbb{R}$.

D.h. die partielle Ableitung $\frac{\partial u}{\partial x}(a,b)$ existiert in (a,b) und die partielle Ableitung $\frac{\partial v}{\partial x}(a,b)$ existiert in (a,b) und es gilt:

$$f'(a+ib) = \frac{\partial u}{\partial x}(a,b) + i\frac{\partial v}{\partial x}(a,b). \quad (4.1)$$

Aber für $h_n := 0 + i\varepsilon_n$, $\varepsilon_n \to 0$ gilt: (ähnliche Rechnung)

$$\frac{f(z+h_n) - f(z)}{h_n}$$

$$= \left(\frac{u(a,b+\varepsilon_n) - u(a,b)}{i\varepsilon_n}\right) + i\left(\frac{v(a,b+\varepsilon_n) - v(a,b)}{i\varepsilon_n}\right)$$

$$= -i\left(\frac{u(a,b+\varepsilon_n) - u(a,b)}{\varepsilon_n}\right) + \left(\frac{v(a,b+\varepsilon_n) - v(a,b)}{\varepsilon_n}\right)$$

$\Rightarrow f'(c) \left(= \operatorname{Re}(f'(c)) + i \operatorname{Im}(f'(c))\right)$ da f komplex diff. in c ist.

$\Rightarrow$ die partielle Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial y}(a,b)$ und $\frac{\partial v}{\partial y}(a,b)$ in (a,b) existieren, und

$$f'(a+ib) = f'(c) = \frac{\partial v}{\partial y}(a,b) - i\frac{\partial u}{\partial y}(a,b) \qquad (4.2)$$

Aber (8) und (9) implizieren

Die Cauchy-Riemann Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial v}{\partial y}(a,b) \quad \underline{\underline{\text{und}}} \qquad (4.3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(a,b) = -\frac{\partial u}{\partial y}(a,b) \quad \forall (a,b) \in U$$

Satz 3.3 (ergänzt).

Seien $f: U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g: V \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph,

U, V offen. Dann gilt:

a) $f+g: U \cap V \to \mathbb{C}$, $f \cdot g: U \cap V \to \mathbb{C}$ sind holomorph mit $(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z)$ und

$(f \cdot g)'(z) = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z) \quad \forall z \in U \cap V.$

b) falls $g(z) \neq 0 \ \forall z \in V$, dann ist $\frac{f}{g}: U \cap V \to \mathbb{C}$ holomorph mit $\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - g'(z)f(z)}{g^2(z)}$ $\forall z \in U \cap V$

c) $f \circ g: V \cap g^{-1}(U) \to \mathbb{C}$ holomorph mit

$(f \circ g)'(z) = f'(g(z)) \cdot g'(z) \quad \forall z \in V \cap g^{-1}(U)$

d) $\tilde{f}: U \to \mathbb{R}^2$, $\tilde{f}(x,y) = (f^{Re}(x+iy), f^{Im}(x+iy))$

ist differenzierbar mit

$$D\tilde{f}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{f}^1}{\partial x} & \frac{\partial \tilde{f}^1}{\partial y} \\ \frac{\partial \tilde{f}^2}{\partial x} & \frac{\partial \tilde{f}^2}{\partial y} \end{pmatrix}\Bigg|_{(x,y)}$$

dabei $\tilde{f}^1, \tilde{f}^2: U \to \mathbb{R}$ sind durch

$\tilde{f}(x,y) = (\tilde{f}^1(x,y), \tilde{f}^2(x,y))$ gegeben.

Ü4 Blatt 1 / Blatt 2

Cauchy-Riemann Gleichungen ... weiter.

4.2 Beziehung zu Harmonischen Abbildungen.

Sei $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(U, \mathbb{R})$, U offen.

Defn. 4.3

Laplace von f ist

$$\Delta f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \Delta f(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^i \partial x^i}$$

f heißt harmonisch falls $\Delta f(x) \equiv 0 \; \forall x \in U$.

Sei $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ holomorph mit

$f(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y)$, und setze weiterhin voraus, dass $u, v : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\in C^2(U, \mathbb{R})$ sind.

Von den Cauchy-Riemann Gleichungen sehen wir, dass

$$\Delta u \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\stackrel{(C.R.)}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$= 0.$$

Ähnlich $\Delta v = 0$. Also $u, v : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sind beide harmonisch.

4.4 (ÜA) Sei $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y)$, $u, v : U \to \mathbb{R} \in C^1(U, \mathbb{R})$. Falls $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ und $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ in U gilt, dann ist $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$ $\forall z = x+iy \in U$.

mit $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$

$= \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) - i\,\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \quad \forall z = x+iy \in U.$

5 Reihen in $\mathbb{C}$.

Defn 5.1
Seien $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{C}$. Die **Reihe** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (zuerst formal Summe) heißt konvergent, falls die Folge

$(S_\ell)_{\ell=1}^{\infty}$, $S_\ell := \sum_{i=0}^{\ell} a_\ell$, konvergiert in $\mathbb{C}$.

Im konvergent Fall wird $\lim_{\ell\to\infty} S_\ell$ mit

$$S \sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim_{\ell\to\infty} S_\ell$$ bezeichnet.

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent, falls $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Wie in $\mathbb{R}$ gilt:

Satz 5.2: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert.

Beweis: $\tilde{S}_\ell := \sum_{i=0}^{\ell} |a_i| \xrightarrow{l\to\infty} r \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$(\tilde{S}_\ell)_{\ell=1}^{\infty}$ Cauchy in $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$|\tilde{S}_n - \tilde{S}_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$$

Für $S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ gilt somit:

$$|S_n - S_m| = \left| \sum_{i=m+1}^{n} a_i \right| \quad \text{für } n \geq m$$

$$\leq \sum_{i=m+1}^{n} |a_i| = |\tilde{S}_n - \tilde{S}_m| < \varepsilon$$

$$\forall n, m \geq N.$$

D.h. $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ Cauchy. $\mathbb{Q}$ vollständig

$\Rightarrow$ S_n konvergiert. ∎

Defn. 5.3 Für $a, a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$ heißt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$ eine **Potenzreihe** (zuerst formell).

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ heißt **konvergent in $p \in \mathbb{C}$** falls

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (p-a)^n$ konvergiert, d.h.

$S_\ell := \sum_{n=0}^{\ell} a_n (p-a)^n$ erfüllt $S_\ell \xrightarrow{\ell \to \infty} s$ für ein $s \in \mathbb{C}$.

Der **Konvergenzradius** R von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ ist

$$R := \begin{cases} \infty\,; & \text{falls } \limsup_{n \to \infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|} \right) = 0 \\ 0\,; & \text{falls } \quad '' \qquad\qquad '' = \infty \\ \dfrac{1}{\left(\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)}\,; & \text{sonst.} \end{cases}$$

Satz 5.4: Seien a, a_n, R wie in Defn. 5.3

a) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ konvergiert absolut, gleichmässig

auf $\overline{B_\rho(a)}$ für $\rho < R$.

b) Sei $f: B_R(a) \to \mathbb{C}$ durch $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$.

Dann gilt: f ist holomorph auf $B_R(a)$ und $f', f'', \ldots$

sind auch holomorph auf $B_R(a)$.

Es gilt:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-a)^{n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} \cdot (z-a)^n .$$

o.B.d.A ist $a=0$, sonst untersuche $g: U-a \to \mathbb{C}$, $g(z) := f(z+a)$.

a) Wie im Fall $\mathbb{R}$: Sei $|z| \le \rho < R$, und $\theta := \frac{\rho}{R} (<1)$.

Angenommen $0 < R < \infty$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Sei $N \in \mathbb{N}$ mit

$\sqrt{\theta} \cdot R \le \frac{1}{|a_n|^{\frac{1}{n}}}$ $\forall n \ge N$ $\left(\text{möglich da } \left(\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}} \right) = R > \sqrt{\theta} \cdot R \text{ da } \theta < 1 \right)$

Dann gilt: $(l < m)$ $\sum_{n=l}^{m} |a_n z^n| = \sum_{n=l}^{m} \left(R |a_n|^{\frac{1}{n}} \frac{|z|}{R} \right)^n$

$$\leq \sum_{n=l}^{m} \left(\frac{1}{\sqrt{\theta}} \frac{|z|}{R} \right)^n \quad \forall l \geq N \text{ (da } n \geq l)$$

$$\leq \sum_{n=l}^{m} \left(\frac{1}{\sqrt{\theta}} \cdot \frac{\theta}{1} \right)^n, \text{ da } \frac{|z|}{R} \leq \frac{\rho}{R} = \theta;$$

$$= \sum_{n=l}^{m} (\theta^{\frac{1}{2}})^n = (\theta^{\frac{1}{2}})^l \sum_{n=0}^{m-l} (\theta^{\frac{1}{2}})^n$$

$$\underset{m \to \infty}{\leq} (\theta^{\frac{1}{2}})^l \cdot \left(\frac{1}{1-\theta^{\frac{1}{2}}} \right)$$

$$\leq \varepsilon \qquad (\text{da } 0 < \theta < 1)$$

$$\forall l \geq M(\theta).$$

D.h. $\sum_{n=l}^{m} |a_n z^n| < \varepsilon \quad \forall\, l \geq \max(M, N) =: \tilde{M} \quad (*)$

$\Rightarrow \tilde{S}_l := \sum_{n=0}^{l} |a_n z^n|$ ist Cauchy.

$\Rightarrow \tilde{S}_l \xrightarrow[l\to\infty]{} \tilde{S}$, für ein $\tilde{S} \in S$.

Weiterhin gilt: $\left| \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| - \sum_{n=0}^{l} |a_n z^n| \right|$

$$= \left| \sum_{n=l+1}^{\infty} |a_n z^n| \right|$$

$$< \varepsilon \quad \forall\, l \geq \tilde{M} \quad \text{(wegen (*))}. \quad \forall z \text{ mit } |z| \leq \rho$$

D.h. die Konvergenz ist gleichmässig.

b) Schritt 1

von Satz 5.4:

Zwei Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(n+1)a_{n+1}}_{\overset{!!}{b_n}} z^n\right)$

haben Konvergenz Radius R und S. Es gilt $R = S$.

$$\left(\frac{1}{R}\right) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \,,$$

$$\left(\frac{1}{S}\right) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|}$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \underbrace{(n+1)^{\frac{1}{n}}}_{\downarrow 1} \cdot |a_{n+1}|^{\frac{1}{n}}$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \left(|a_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}}\right)^{\left(\frac{n+1}{n}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 1}$$

(jetzt handelt von $\limsup_{n\to\infty} |r_n| = m \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} |r_n|^{1+\frac{1}{n}} = m$ für beliebige $|r_n| \in \mathbb{R}$)

$$= \frac{1}{R}.$$

D.h. $f_1(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \lim_{m\to\infty} S_m'(z)$

konvergiert absolut $\forall\, |z| < R \Rightarrow$ konvergiert absolut gleichmässig auf $\overline{B_\rho(0)}$ $\forall\, \rho < R$.

Hier ist $S_m(z) = \sum_{n=0}^{m} a_n z^n$.

<u>Schritt 2</u>: f ist komplex differenzierbar in z und $f_1(z) = f'(z)$

<u>Beweis</u>: Sei $\rho > 0$ mit $|z| = \tilde{\rho} < \rho < R$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

: Es gilt für h mit $|h| < \frac{\rho - \tilde{\rho}}{2}$, $|z+h| \leq |z| + |h| < \tilde{\rho} + \frac{\rho - \tilde{\rho}}{2} = \frac{\tilde{\rho}}{2} + \frac{\rho}{2} < \rho$.

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f_1(z)$$

$$= \frac{S_n(z+h) - S_n(z)}{h} + \frac{R_n(z+h) - R_n(z)}{h} - f_1(z)$$

$$= \underbrace{\left(\frac{S_n(z+h) - S_n(z)}{h} - S_n'(z)\right)}_{=: \mathrm{I}} + \underbrace{\left(\frac{R_n(z+h) - R_n(z)}{h}\right)}_{=: \mathrm{II}} + \underbrace{\left(S_n'(z) - f_1(z)\right)}_{=: \mathrm{III}}$$

$$= (\mathrm{I}) + (\mathrm{II}) + (\mathrm{III}).$$

Der 2te Term (II) kann man als

$$\left(\frac{R_n(z+h) - R_n(z)}{h}\right) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\left((z+h)^{k-1} + (z+h)^{k-2} z + \cdots + (z+h)z^{k-2} + z^{k-1}\right)$$

umschreiben.

(i.A. $(a-b)\sum_{k=n}^{r} d_k(a^{k-1}+a^{k-2}\cdot b+\dots+b^{k-1})$

$$= \sum_{k=n}^{r} a_k(a^k-b^k).$$

~~Jetze~~ Setze $a:=z+h$, $b:=z \Rightarrow h=(a-b)$)

$$\Rightarrow \left|\frac{R_n(z+h)-R_n(z)}{h}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} k|d_k|\rho^{k-1}, \text{ da}$$

$|z+h|\leq\rho$ und $|z|\leq\rho$.

$\Rightarrow$ $\exists n_0\in\mathbb{N}$, so dass

$$\left|\frac{R_n(z+h)-R_n(z)}{h}\right| < \varepsilon \quad \forall n\geq n_0 \quad \forall z\in\overline{B_\rho(0)},$$

da $\sum_{k=0}^{\infty} k|a_k|\rho^{k-1}$ konvergiert (siehe Schritt 1).

$(\rho<R)$

$S_n'(z) \xrightarrow{n\to\infty} f_1(z)$ von Schritt 1

$\Rightarrow \exists n_1 > 0$ s.t. $|S_n'(z) - f_1(z)| < \varepsilon \ \forall n \geq n_1$

sei $n := \max(n_0, n_1)$.

S_n ist holomorph $\Rightarrow \exists \delta(n) > 0$, so dass $|h| < \delta(n)$

$$\Rightarrow \left| \frac{S_n(z+h) - S_n(h)}{h} - S_n'(z) \right| < \varepsilon \ \forall |h| \leq \delta(n).$$

D.h. $\forall h \neq 0$ mit $|h| \leq \min(\delta(n), \frac{\rho - \tilde{\rho}}{2})$ gilt

$$\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f_1(z) \right| \leq 3\varepsilon.$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

$\blacksquare$