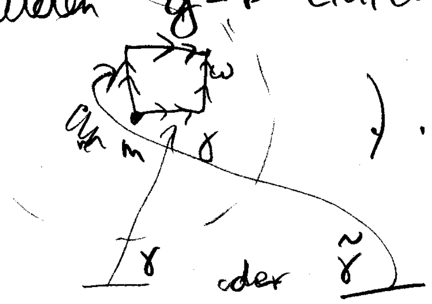
Beweis von
Lemma 7.25 (Variante von Propn. 7.19). extra 1

Sei $m \in \mathbb{C}$, $f: B_\varepsilon(m) \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig ($\varepsilon > 0$).
$f: B_\varepsilon(m) \longrightarrow \mathbb{C}$ besitzt eine Stamm Funktion
$F: B_\varepsilon(m) \longrightarrow \mathbb{C} \iff \int_\gamma f(z)dz = 0 \;\forall$ Rechteckwege
$\gamma: [a,b] \to B_\varepsilon(m)$.

Beweis: ($\Rightarrow$) gleich wie im 7.19. ($\Leftarrow$):
Definiere $F: B_\varepsilon(m) \longrightarrow \mathbb{C}$ durch

$$F(\omega) = \int_\gamma f(z)dz \quad \text{wobei} \quad \gamma: [a,b] \to B_\varepsilon(m)$$

ein Halbrechteck weg von m nach w ist
(d.h. γ stetig $\gamma = \sigma \cup \alpha$, wobei σ, α
Achsenparallelen $\mathcal{G}$-p. Linien sind $\gamma(a) = m$,
$\gamma(b) = w$).



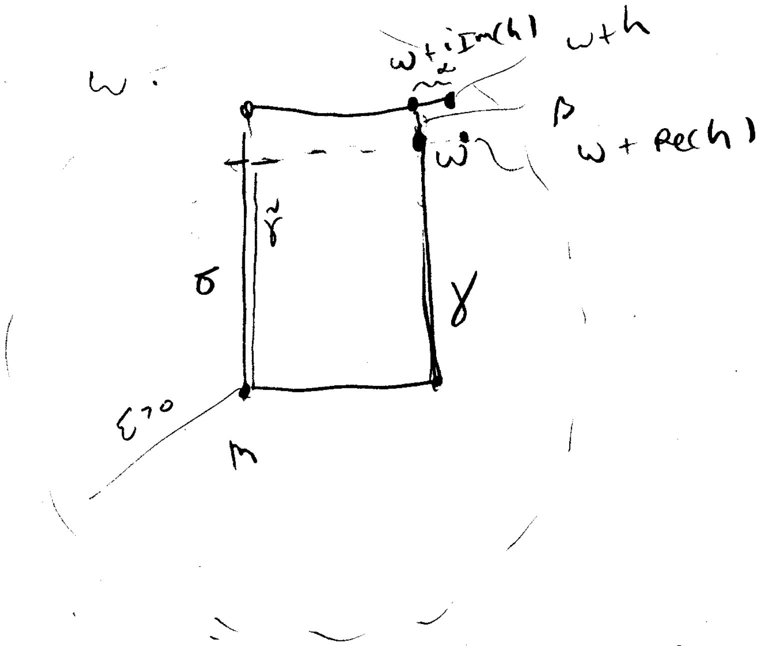
wenn $\tilde{\gamma}: [c,d] \to B_\varepsilon(m)$ eine andere
Halbrechteckweg ist mit $\tilde{\gamma}([c,d]) \neq \gamma([c,d])$),
dann gilt $\int_\gamma f(z)dz - \int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz + \int_{\hat{\tilde{\gamma}}} f(z)dz$

wobei $\wedge$ die Kurve die rückwärts läuft bezeichnet.

$= \int_{\gamma \cup \hat{\tilde{\gamma}}} f(z)\,dz = 0$, da $\gamma \cup \hat{\tilde{\gamma}}$ ein etwa Rechteckweg ist. Dadurch ist F wohldefiniert.

Sei $w \in B_\varepsilon(m)$ mit $\mathrm{Im}(w) \neq \mathrm{Im}(m)$ und $\mathrm{Re}(w) \neq \mathrm{Re}(m)$.

Sei γ ein Halbrechteckweg von m nach w.



Sei σ der Halbrechteckweg von m nach $w + i\,\mathrm{Im}(h)$, der zuerst längs $\tilde{\gamma}$ läuft

($\gamma \cup \hat{\tilde{\gamma}}$ Rechteckweg in $B_\varepsilon(m)$)

Sei α die g-p. Linie von $w+i\,\mathrm{Im}(h)$ nach $w+h$ etwa)
Sei β " " w nach $w+i\,\mathrm{Im}(h)$
Dann gilt:

$$F(w+h)-F(w) = \int_{\sigma\cup\alpha} f(z)\,dz - \int_{\gamma} f(z)\,dz$$

$$= \int_{\sigma\cup\alpha} f(z)\,dz - \int_{\gamma} f(z)\,dz - \int_{\beta} f(z)\,dz + \int_{\beta} f(z)\,dz$$

$$= \underbrace{\cancel{\int_{\sigma} f(z)\,dz - \int_{\gamma\cup\beta} f(z)\,dz}}_{=0} + \int_{\beta} f(z)\,dz + \int_{\alpha} f(z)\,dz$$

((gerade gezeigt)

$\alpha : [0,1] \to B_\varepsilon(m)$ ist $\alpha(t) = (w+i\,\mathrm{Im}(h)) + t\,\mathrm{Re}(h)$

$\beta : [0,1] \to B_\varepsilon(m)$ ist $\beta(t) = w + i\,\mathrm{Im}(h)\cdot t$)

$\Rightarrow \alpha'(t) = \mathrm{Re}(h),\ \beta'(t) = i\,\mathrm{Im}(h)$

$$\Rightarrow \int_{\alpha} f(z)\,dz + \int_{\beta} f(z)\,dz = \int_0^1 f(w+i\,\mathrm{Im}(h)+t\,\mathrm{Re}\,h)\cdot \mathrm{Re}(h)\,dt$$

$$+ \int_0^1 f(w+t\,i\,\mathrm{Im}(h))\cdot i\,\mathrm{Im}(h)\,dt$$

$$= \int_0^1 f(w+i\,\mathrm{Im}(h)+t\,\mathrm{Re}(h))\cdot h\,dt$$

$$+ \int_0^1 i f(w+t\,i\,\mathrm{Im}(h))\,\mathrm{Im}(h) - i f(w+i\,\mathrm{Im}(h)+t\,\mathrm{Re}(h))\,\mathrm{Im}(h)\,dt.$$

exhau

$$\Rightarrow \frac{F(w+h)-F(w)}{h} = \underbrace{\int_0^1 f(w+i\,\mathrm{Im}(h)+t\,\mathrm{Re}(h))\,dt}_{=:\,I} + \underbrace{\int_0^1 \left(f(w+ti\,\mathrm{Im}(h)) - f\left(\begin{matrix} w+i\,\mathrm{Im}(h) \\ +t\,\mathrm{Re}(h)\end{matrix}\right)\right) \frac{i\,\mathrm{Im}(h)}{h}\,dt}_{=:\,II}$$

$$I \xrightarrow{h\to 0} f(w), \quad II \xrightarrow{h\to 0} 0,$$ da

$$\frac{|\mathrm{Im}(h)|}{|h|} \leq 1$$ und

$$\sup_{t\in[0,1]} \left|f(w+ti\,\mathrm{Im}(h)) - f(w+i\,\mathrm{Im}(h)+t\,\mathrm{Re}(h))\right| \xrightarrow{h\to 0} 0.$$

$\blacksquare$

7.26 existiert NICHT

(Wegintegrale von hol. Fn. längs beliebiger Wege)

<u>Definition 7.27</u>: Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{C}$ -1-
holomorph und $\gamma: [a,b] \longrightarrow U$ ein <u>Weg</u> (<u>stetig</u>).
(nicht notwendigerweise ein Int. Weg).
Wir definieren $\int_\gamma f(z)dz$ wie folgt.

Da $\gamma([a,b]) \subseteq U$ kompakt ist und γ stetig ist,
können wir eine Zerlegung $I = a_0 = a < a_1 < a_2 < \dots < a_N = b$ von $[a,b]$
und ein $\delta > 0$ finden, so dass $\gamma([a_i, a_{i+1}]) \subseteq B_\delta(\gamma(a_i)) \subseteq U$ ist. (#)
<u>(ÜA)</u>
$\forall i = 1, \dots, N$.

Definiere:
$$\int_\gamma f(z)dz = F_1(\gamma(a_1)) - F_1(\gamma(a_0))$$
$$+ F_2(\gamma(a_2)) - F_2(\gamma(a_1)) =: W(a_0, \dots, a_N)$$
$$(\gamma) \qquad + \qquad\qquad =: W(I)$$
$$+ F_N(\gamma(a_N)) - F_N(\gamma(a_{N-1})),$$

wobei $F_1: B_\delta(\gamma(a_0)) \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Stamm Fn.
für $f|_{B_\delta(a_0)}: B_\delta(\gamma(a_0)) \longrightarrow \mathbb{C}$ ist,
$F_i: B_\delta(\gamma(a_{i-1})) \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Stamm Fn.
für $f|_{B_\delta(\gamma(a_{i-1}))}: B_\delta(\gamma(a_{i-1})) \longrightarrow \mathbb{C}$ ist.

wir prüfen nach, dass $\int_\gamma f(z)dz$ ist dadurch wohldefiniert:

1) die wahl der Stammfn. F_i ist unwichtig, da falls $\tilde{F}_i$ eine andere ist, dann gilt: $F_i = \tilde{F}_i + c(i)$, $c(i) \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow \quad F_i(\gamma(a_i)) - F_i(\gamma(a_{i-1}))$$
$$= \tilde{F}_i(\gamma(a_i)) - \tilde{F}_i(\gamma(a_{i-1})).$$

2). Sei $\gamma : [r,s] \to B_\delta(\gamma(r)) \subseteq U$ einige, $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph und $F: B_\delta(\gamma(r)) \to \mathbb{C}$ sei eine Stamm f. für f auf $B_\delta(\gamma(r))$. Und $m \in (r,s)$.
Dann gilt:

$$F(\gamma(s)) - F(\gamma(r)) = F(\gamma(s)) - F(\gamma(m))$$
$$+ F(\gamma(m)) - F(\gamma(r))$$

Damit sieht man, dass ~~wir~~ beliebig viele punkte $J = (\{c_1 < \dots < c_p\})$ zur Zerlegung $I = (\{a_0 < a_1 < \dots < a_N\})$ dazu nehmen dürfen, und der wert von $(*)$ wird nicht dadurch geändert. (Die neue Zerlegung nennen wir $I \cup J$)

3) Sei $I = \{a_0 < a_1 < \cdots < a_N\}$ eine Zerlegung von

$[a,b]$ mit der Eigenschaft $(\#)$ und

$J := \{c_0 < \cdots\cdots < c_N\}$ " "

$(\#)$.

wir haben gerade gezeigt, dass

$$w(I) = w(I \cup J) = w(J).$$

8.1

Homotopien von Kurven

Defn. 8.1: sei $\gamma : [a,b] \longrightarrow U \subseteq \mathbb{C}$ weg.

Der normierter weg $\tilde{\gamma} : [0,1] \to U \subseteq \mathbb{C}$ ist

$\tilde{\gamma}(t) := \gamma(a(1-t)+tb)$.

Defn. 8.2

Eine Variation in U zwischen normierten wegen

$\tilde{\gamma}, \tilde{\sigma} : [0,1] \longrightarrow U$ ist eine

stetige Abbildung $h : [0,1] \times [0,1] \to U$

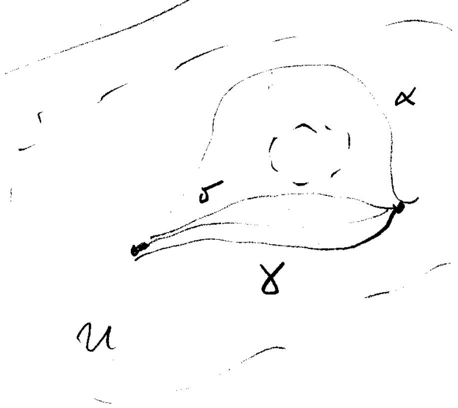
mit $h(\cdot, 0) = \tilde{\gamma}(\cdot)$ und $h(\cdot, 1) = \tilde{\sigma}(\cdot)$.

Defn. 8.3 **Eine homotopie in $\mathcal{U}$** zwischen zwei normierten Wegen $\tilde{\gamma}, \tilde{\sigma}$ ist eine Variation mit

$$h(0,s) = \tilde{\gamma}(0) = \tilde{\sigma}(0) \quad \forall s \in [0,1],$$

und $$h(1,s) = \tilde{\gamma}(1) = \tilde{\sigma}(1) \quad \forall s \in [0,1].$$

D.h. die Endpunkten bleiben fest unter der Variation.



$\gamma \sim \sigma$

aber $\gamma \not\sim \alpha$.

γ ist homotop zu σ in $\mathcal{U}$ falls $\exists$ Homotopie in $\mathcal{U}$ zwischen $\tilde{\gamma}$ und $\tilde{\sigma}$.

Schreibweise $\gamma \underset{\mathcal{U}}{\sim} \sigma \Leftrightarrow \gamma$ homotop zu σ in $\mathcal{U}$.

Eigentlich soll es $\gamma \sim_{\mathcal{U}} \sigma$ heißen, um klar zu machen, dass wir nicht ausserhalb $\mathcal{U}$ gehen dürfen während der Variation.

ÜA $\sim_{\mathcal{U}}$ ist ein äquivalenz relation. (i) $a \sim b$, $b \sim c \Rightarrow a \sim c$, ii) $a \sim a$, iii) $a \sim b \Rightarrow b \sim a$.)

Falls $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\sigma : [c,d] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\mathcal{U} = \mathbb{C}$ ist, mit $\gamma(a) = \sigma(c)$, $\gamma(b) = \sigma(d)$, dann ist $\gamma \sim_{\mathbb{C}} \sigma$ (ÜA).

<u>Satz 8.4</u>: Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph, U offen, und $\gamma \sim_U \sigma$. Dann gilt:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\sigma f(z)\,dz .$$

<u>Beweis</u>: $\int_\gamma f(z)dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz \overset{?}{=} \int_\sigma f(z)dz = \int_{\tilde{\sigma}} f(z)dz$

wegen der Def. von Integral.

Sei $h: [0,1]\times[0,1] \longrightarrow U$ eine Homotopie zwischen $\tilde{\gamma}$ und $\tilde{\sigma}$.

h stetig, $[0,1]\times[0,1]$ kompakt $\Longrightarrow$

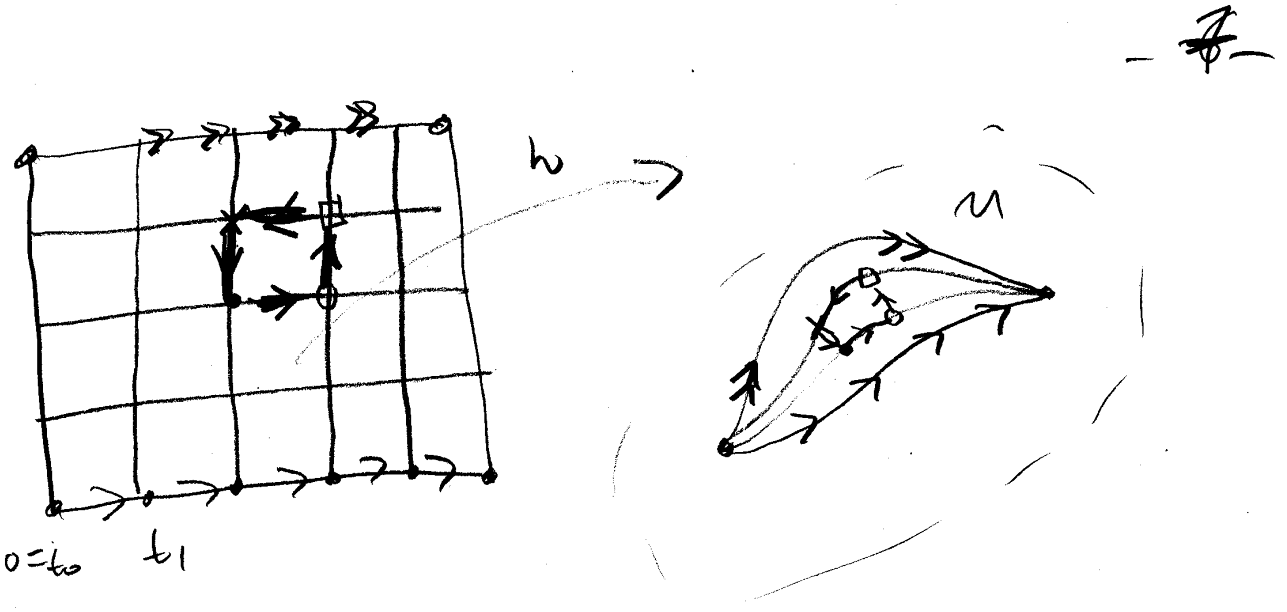
$h([0,1]\times[0,1]) \subseteq U$ ist kompakt und h gleichmässig stetig

$\Longrightarrow \exists\, \delta > 0$ und

eine Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$ von $[0,1]$

mit $h([t_i, t_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}]) \subseteq \underbrace{B_\delta(h(t_i,t_j))}_{\subseteq U}$

$\forall i,j = 1, \dots, N-1$.



<u>Prozedur:</u> wir fangen mit $\tilde{\gamma}$ an: $\tilde{\gamma} = h(\cdot,0) : [0,1] \to \mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$

Änder $\tilde{\gamma}$ zu $\tilde{\gamma}_1$ ab: $\tilde{\gamma}_1 = \tilde{r} \cup \tilde{\gamma}|_{[t_1,b]}$, wobei

$$\tilde{r} = \underbrace{h(0,\cdot)|_{[t_0,t_1]}}_{t_0 = 0} \cup h(\cdot,t_1)|_{[t_0,t_1]} \cup \hat{h}(t_1,\cdot)$$

wobei $\hat{h}(t,s) = h(t_1, t_1 - s)$, $s \in [t_0 = 0, t_1]$

$\hat{h} : [t_0, t_1] \to \mathcal{U}$. $\tilde{r}$ und $\tilde{\gamma}|_{[t_0,t_1]}$ bilden beide in einem Ball $B_\delta(\tilde{\gamma}(t_0))$ ab. Die Endpunkten von Beiden sind Gleich. $\Rightarrow$

$\int_{\tilde{r}} f(z)\,dz = F(\tilde{r}(3t_1)) - F(\tilde{r}(t_0)) = F(\tilde{\gamma}(t_1)) - F(\tilde{\gamma}(0))$, (wobei F eine Stamm fn. für f auf $B_\delta(\tilde{\gamma}(t_0))$ ist: existiert wegen Kor. 7.226)

$= \int_{\tilde{\gamma}|_{[t_0,t_1]}} f(z)\,dz$ per Re h. ~~von~~ Integral.

$$\Rightarrow \int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz = \int_{\tilde{\gamma} \cup \tilde{\delta}|[t_1,b]} f(z)dz = \int_{\tilde{\gamma}_1} f(z)dz.$$

Dieses Prozedur kann man induktiv fortsetzen (Bild). Wir bekommen damit:

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz = \int_{\ell_1} f(z)dz + \int_{\tilde{\sigma} = h(\cdot,1)} f(z)dz + \int_{\ell_2} f(z)dz$$

wobei $\ell_1 : [0,1] \to \mathcal{U}$ ist

$\ell_1(t) := h(0,t)$, und

$\ell_2 : [0,1] \to \mathcal{U}$ ist

$\ell_2(t) := h(1,1-t)$. Aber

$h(0,t) = h(0,1) = h(0,0) = \tilde{\gamma}(0) = \tilde{\sigma}(0) \quad \forall t \in [0,1]$

(feste Endpunkten) und

ähnlich

$h(1,t) = h(1,1) = h(1,0) \quad \forall t \in [0,1]$

(feste Endpunkten) $\Rightarrow \ell_1 =$ konst, und $\ell_2 =$ konst.
(i.e. $\ell_1(s) = h(0,s) = \tilde{\gamma}(0)\ \forall s \in [0,1]$, $\ell_2(s) = \tilde{\gamma}(1)\ \forall s \in [0,1]$)

$$\Rightarrow \int_{\ell_1} f(z)dz = \int_{\ell_2} f(z)dz = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz = \int_{\tilde{\sigma}} f(z)dz \quad \blacksquare$$

Defn. 8.5: Sei $\gamma : [a,b] \to U \subseteq \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg ($\gamma(a) = \gamma(b)$).

γ heißt "zusammenziehbar in U", falls $\gamma \sim_U \text{konst}_{\gamma(a)}$ ist, wobei

$\text{konst}_{\gamma(a)} : [0,1] \to U$, ist $\text{konst}_{\gamma(a)}(s) = \gamma(a)$.

Bemerkung: Falls $U = \mathbb{C}$ ist, dann ist jeder geschl. Weg γ immer zusammenziehbar in $\mathbb{C}$ (ÜA).

Defn. 8.6: $U \subseteq \mathbb{C}$ offen heißt "einfach zusammenhängend", falls alle geschlossene Wege $\gamma : [a,b] \to U \subseteq \mathbb{C}$ zusammenziehbar in U sind.

Einfach zusammenhängend ist NICHT das gleiche wie zusammenhängend:

U ist einfach zhngd. aber NICHT zhngd.

U ist zhngd. aber NICHT einfach zhngd.

Satz 8.7: Cauchy Integralsatz. Sei $\gamma: [a,b] \to \mathcal{U}$, ein geschlossener zusammenziehbaren Weg in $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ offen, $f: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ holomorph.
Dann gilt: $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

Beweis: Es gilt $\gamma \sim_{\mathcal{U}} \text{konst}_{\gamma(a)}$. Satz 8.4 besagt: $\int_\gamma f(z)dz = \int_{\text{konst}_{\gamma(a)}} f(z)dz = 0$. ∎

Korollar 8.8: Sei $f: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ holomorph, $\mathcal{U}$ einfach zhngd. Dann $\exists$ $F: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ holomorph eine Stammfn. für f $(F' = f)$.
Beweis: $\forall$ geschlossene Int. wege gilt:
$\int_\gamma f(z)dz = 0$ wegen 8.7 und $\mathcal{U}$ einfach zhngd.
propn. 7.19 $\Rightarrow$ $\exists$ F Stamm fn. $(F: \mathcal{U} \to \mathbb{C})$ für f. ∎

Defn. 8.9 Sei $\gamma: [a,b] \to \mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$, $\mathcal{U}$ offen, $\sigma: [c,d] \to \mathcal{U}$ geschlossene Wege, und $\tilde{\gamma}, \tilde{\sigma}$ die dazu gehörige normierte Wege. "γ ist frei homotop zu σ in $\mathcal{U}$" bedeutet $\exists$ Variation $h: [0,1]^2 \to \mathcal{U}$, so dass: $h(\cdot, 0) = \tilde{\gamma}(\cdot)$ und $h(\cdot, 1) = \tilde{\sigma}(\cdot)$ und $h(0,s) = h(1,s)$ $\forall s \in [0,1]$. Die Letzte Bedingung sagt: die Wege $h_s: [0,1] \to \mathcal{U}$ mit $h_s(t) := h(t,s)$ sind $\forall t \in [0,1]$ geschlossen.

$\underline{\underline{\text{ÜA}}}$: σ frei homotop zu γ bezeichnen wir mit

$$\sigma \simeq_U \gamma$$

Dann ist $\simeq_U$ ein Äquivalenzrelation.

β frei homotop zu α

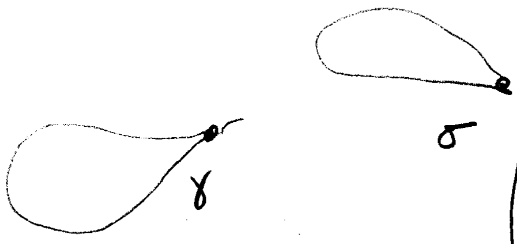
γ frei homotop zu σ

γ NICHT frei homotop zu α.

Satz 8.10: Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph, $\gamma: [a,b] \to U$, $\sigma: [a,b] \to U$ Wege mit γ frei homotop zu σ inU.

Dann gilt: $$\int_\sigma f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz.$$

$\underline{\underline{\text{ÜA}}}$



(ÜA!):
Beweis Idee: $r(e) = h(0,e)$
ein Weg zwischen
$\tilde{\gamma}(0)$ und $\tilde{\sigma}(0)$.

Man zeige: $\hat{r} \vee \gamma \vee r \sim_M \sigma$

$$\Rightarrow \int_{\hat{r} \vee \gamma \vee r} f(z)\,dz = \int_r f(z)\,dz + \int_\gamma f(z)\,dz + \int_{\hat{r}} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz \quad \blacksquare$$

sei $h : [0,1] \times [0,1] \to \mathcal{U}$ eine freie Homotopie

zwischen $\tilde{\gamma}$ und $\tilde{\sigma}$ (normierte Wege)

sei $r_s : [0,s] \to \mathcal{U}$, $r_s(e) = h(0,e)$ $\forall e \in [0,s]$.

$h_s : [0,1] \to \mathcal{U}$, $h_s(t) = h(t,s)$,

$\Rightarrow r_s(s) = h(0,s) = h_s(0)$ $\underline{\underline{\text{und}}}$

$\hat{r}_s(0) = r_s(s) = h(0,s) = h(1,s) = h_s(1)$

(da $h(1,s) = h(0,s)$: $h(\cdot,s)$ ist geschlossen)

$\Rightarrow$ $r_s \vee h_s \vee \hat{r}_s : [0, 1+2s] \to \mathcal{U}$

ist wohldefiniert, stetig.

Definiere $\alpha : [0,1] \times [0,1] \to \mathcal{U}$
durch

$$\alpha(t,s) := r_s \vee h_s \vee \hat{r}_s\left(\frac{t}{1+2s}\right).$$

α $\underline{\underline{\text{stetig}}}$, $\alpha(t,0) = r_0 \vee h_0 \vee \hat{r}_0(t)$
$= h_0(t) = h(t,0) = \gamma(t)$

weiterhin gilt:

$$\alpha(\cdot,1) = (r_1 \cup h_1 \cup \hat{r}_1)(\cdot)$$

$$= r_1 \cup \sigma \cup \hat{r}_1 .$$

$\alpha(\cdot,1) \sim_u \alpha(\cdot,0) = \gamma(\cdot)$ $\boxed{\Rightarrow r_1 \cup \sigma \cup \hat{r}_1 \sim_u \gamma(\cdot)}$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\alpha(\cdot,1)} f(z)\,dz$$

$$= \int_{r_1} f(z)\,dz + \int_\sigma f(z)\,dz$$

$$+ \int_{\hat{r}_1} f(z)\,dz$$

$$= \cancel{\int_{r_1} f(z)\,dz} - \cancel{\int_{r_1} f(z)\,dz}$$

$$+ \int_\sigma f(z)\,dz$$

9 Integralformel von Cauchy.

Def^n 9.1 Ein gut-parametrisierter Kreisweg (g-p. Kreisweg)

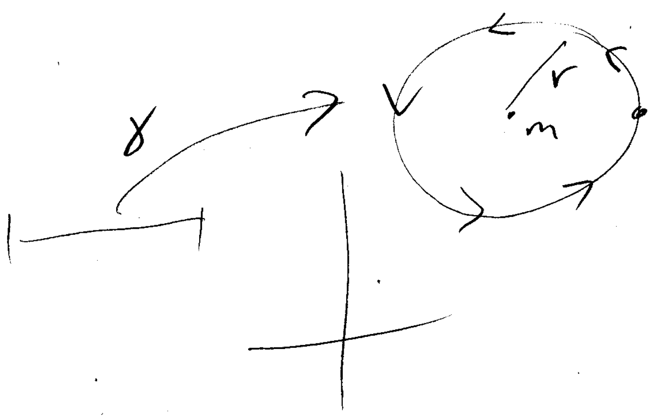
ist ein Weg $\gamma : [a,b] \longrightarrow \partial B_r(m)$

(wobei $r>0$, $m \in \mathbb{C}$) mit

$$\gamma(t) = m + re^{i\frac{(t-a)2\pi}{b-a}}.$$

Achtung: a) dies hat eine Orientierung (Gegenuhrzeigersinn)

b) es läuft den Kreis genau einmal um.



es gilt:

$$|\gamma'(t)| = \frac{2\pi r}{(b-a)} \quad \forall t \in [a,b]$$

ist konstant.

Beispiel: $\gamma : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = re^{it}$ (bildet auf $\partial B_r(0)$ ab)

$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = re^{t^2 2\pi i}$ bildet auf $\partial B_r(0)$ ab

läuft einmal um, aber $|\gamma'(t)| = 4\pi i r e^{t^2 2\pi i} t$ ist nicht konstant.

$\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = re^{it2}$

bildet auf $\partial B_r(0)$ ab, hat $|\gamma'| =$ konst, aber

läuft zweimal um: ist kein g.p. Kreisweg.

Notation: Für $f : \partial B_r(m) \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig

schreiben wir $\int\limits_{\partial B_r(m)} f(z)\,dz$ um $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz$

zu bezeichnen, wobei $\gamma : [a,b] \longrightarrow \partial B_r(m)$ eine

g-p-Kreisweg ist (Propn 7.9 (i) über Umparametrisierung zeigt, dass dies wohldefiniert ist).

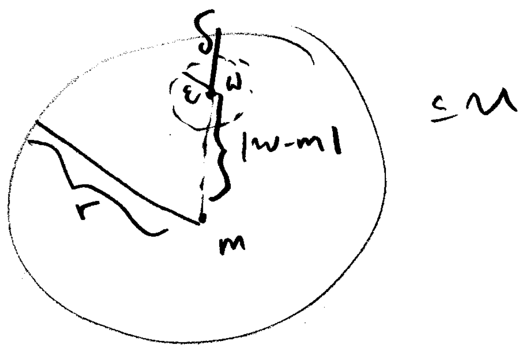
Satz 9.2 (Cauchy's Integralformel).
Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph und $\overline{B_r(m)} \subseteq U$. Dann gilt,

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(m)} \frac{f(z)}{z-w} \, dz \quad \forall w \in B_r(m).$$

Bemerkung: Die Notation $\int_{\partial B_r(m)}$ wurde in Notation 9.3 festgelegt.

Bemerkung: Für $w \in B_r(m)$, $z \in \partial B_r(m)$ ist $\frac{1}{z-w} \neq 0$. Insbesondere ist $\frac{f(\cdot)}{\cdot - w} : \partial B_r(m) \to \mathbb{C}$ ist stetig (also Integral oben wohldefiniert).

Beweis: $w \in B_r(m) \subseteq U$, $\overline{B_r(m)} \subseteq U$.
wähle $\delta > 0$ klein, so dass $B_\varepsilon(w) \subseteq B_r(m) \subseteq U$ $\forall \varepsilon < \delta$

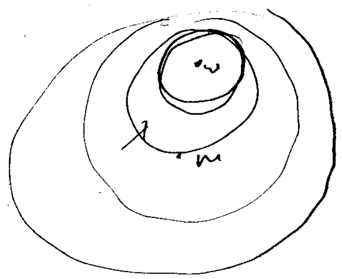


Der g-p- Kreisweg $\gamma: [0,1] \to \partial B_r(m)$
$\gamma(t) = m + re^{i2\pi t}$

ist frei-homotop in $U \setminus \{w\}$ zu — 17 —

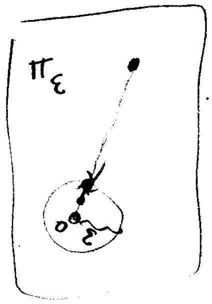
~~diesem~~ g-p. ~~Kreisweg~~ $\sigma : [0,1] \to \partial B_\varepsilon(w)$, $\sigma(t) = w + \varepsilon e^{i2\pi t}$.

Dies sieht man mit einem Bild so

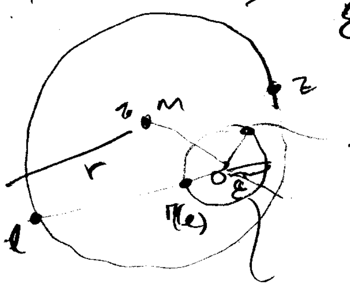


Explizit kann man eine Homotopie ~~wie folgt~~

folgt konstruieren: O.B.d.A. ist $w=0$.



Sei $\Pi_\varepsilon : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to S^1_\varepsilon$ die Projektion:



$$\Pi_\varepsilon(z) = \frac{z}{|z|}\varepsilon$$

Hier ist S^1_ε = Sphäre vom Radius $\varepsilon > 0$:

$$S^1_\varepsilon = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = \varepsilon \}.$$

$\Pi_\varepsilon : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to S^1_\varepsilon$ ist stetig.

Für $z \in \partial B_r(m)$ gilt

$$t\,\Pi(z) + (1-t)\,z \in \overline{B_r(m)}, \text{ da}$$

z, und $\Pi(z) \in \overline{B_r(m)}$ **sind und**

$\overline{B_r(m)}$ **Konvex** ist $\left(\begin{array}{l} R \subseteq \mathbb{C} \text{ konvex} \Leftrightarrow \\ tp + (1-t)q \in R \;\; \forall t \in [0,1] \;\; \forall p, q \in R \end{array} \right)$

Definiere $h : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \overline{B_r(m)} \setminus \{0\} \subseteq U \setminus \{0\}$

durch ,

$$h(t,s) := (1-s)\gamma(t) + s\,\Pi_{S'_\varepsilon}(\gamma(t))$$

$$= (1-s)\gamma(t) + s\,\frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|}\,\varepsilon.$$

$h(t,0) = \gamma(\cdot)$, $h(t,1) = \Pi_{S'_\varepsilon}(\gamma(t)) =: \tilde{\gamma}(\cdot)$

und $h(1,s) = (1-s)\gamma(1) + s\,\frac{\gamma(1)}{|\gamma(1)|}\,\varepsilon = h(0,s)$ $\forall s \in [0,1]$ da $\gamma(0) = \gamma(1)$.

mit $\tilde{\sigma}(t) := \dfrac{(m + re^{i2\pi t})\,\varepsilon}{|m + re^{i2\pi t}|}$

$\tilde{\sigma} : [0,1] \to \partial B_\varepsilon(\overset{\circ}{\omega}) \subseteq \mathbb{C}$,

weiterhin ist $\tilde{\sigma}$

frei-homotop zu $\sigma(\cdot)$ in $U \setminus \{0\}$

$(= U \setminus \{\omega\})$

durch die Homotopie

$$\tilde{h} : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \partial B_\varepsilon(0)$$

$$\tilde{h}(t,s) = \frac{(m(1-s) + re^{i2\pi t})\,\varepsilon}{|(m(1-s) + re^{i2\pi t})|}$$

$\tilde{h}(t,0) = \tilde{\sigma}(t)$,

$\tilde{h}(t,1) = \sigma(t)$, stetig,

$(\tilde{h}(1,s) = \tilde{h}(1,0))$.

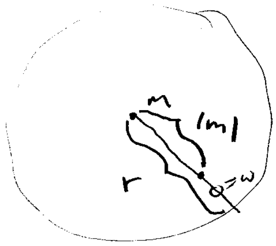
Es gilt auch:

$$\left(m(1-s) + r e^{i2\pi t}\right) \neq 0 \quad \forall s \in [0,1], \ \forall t \in [0,1].$$

Falls $\left(m(1-s) + r e^{i2\pi t}\right) = 0 \quad (\ast)$

$$\Rightarrow \quad |m| = \frac{r}{1-s} \quad \text{für } 0 \leq s \neq 1$$

aber $|m| < r$



$$\Rightarrow \quad r > |m| = \frac{r}{1-s} \geq r \Rightarrow \lightning \quad \forall s \in [0,1).$$

für $s = 1$ $(\ast) \Rightarrow$ $r = 0 \Rightarrow \lightning$.

D.h. σ ist frei homotop zu γ in $\mathcal{U} \setminus \{0\}$.

$\sigma \approx_{\mathcal{U} \setminus \{0\}} \gamma$. $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ **holomorph**

$$\Rightarrow \quad g : \mathcal{U} \setminus \{w = 0\} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ holomorph},$$

wobei $g(z) := \dfrac{f(z)}{z-w}$.

Satz 8.10 $\Rightarrow$

$$\int_\sigma g(z)\,dz = \int_\gamma g(z)\,dz \quad \text{d.h.}$$

$$\int_\sigma \frac{f(z)}{z-w}\,dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz$$

Jetzt benutzen wir die Def. von $\sigma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C},$

$$\sigma(t) = \omega + e^{i2\pi t}\varepsilon \Rightarrow \sigma' = 2\pi i\, e^{i2\pi t}\varepsilon$$

$$\Rightarrow \int_\sigma \frac{f(z)}{(z-\omega)}\, dz$$

$$= \int_0^1 \frac{f(\sigma(t))}{(\sigma(t)-\omega)} \cdot \sigma'(t)\, dt$$

$$= \int_0^1 \frac{f(\omega + \varepsilon e^{i2\pi t})}{\cancel{\varepsilon e^{i2\pi t}}} \cdot 2\pi i\, \cancel{\varepsilon e^{i2\pi t}}\, dt$$

$$\xrightarrow{\varepsilon \to 0} 2\pi i\, f(\omega)$$

ε war beliebig

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)\, dz}{(z-\omega)} = \frac{1}{2\pi i} \int_\sigma \frac{f(z)}{(z-\omega)}\, dz = f(\omega)$$

$\boxed{\text{qed}}$