

Hilfslemma 9.3

— 21 —

Sei M offen $\subseteq \mathbb{C}$, $f: M \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$
stetig. Wir setzen voraus, dass

a) $f(\cdot, t): M \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph $\forall t \in [a, b]$.

b) $\frac{\partial f}{\partial z}(M \times [a, b]) \rightarrow \mathbb{C}$ ist stetig,

woher $\frac{\partial f}{\partial z}(m, t) = \frac{\partial}{\partial z} (f(\cdot, t))|_m$

die komplexe Ableitung von $f(\cdot, t)$
in m ist.

Dann gilt: die Funktion $F: M \rightarrow \mathbb{C}$,
 $F(z) := \int_a^b f(z, t) dt$ ist holomorph,

und es gilt:

$$\frac{\partial F}{\partial z}(z) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(z, t) dt.$$

Sei $z_0 \in M$ fest, und sei $h_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ eine Folge in $\mathbb{C}$.

Definiere $S_k(t) := \frac{f(z_0 + h_k, t) - f(z_0, t)}{h_k} \quad (*)$

Es gilt: $f(z_0 + h, t) - f(z_0, t) \quad \left(\begin{array}{l} \text{Hauptsatz 2} \\ \text{der Diff.- und} \\ \text{Int.-Rechnungen} \end{array} \right)$

$$= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} (f(z_0 + sh_k, t)) ds$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(z_0 + sh_k, t) \cdot h_k \cdot ds$$

$\Rightarrow$ für t fest

$$S_k(t) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(z_0 + sh_k, t) \cdot \frac{h_k}{h_k} ds$$

$$\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \frac{\partial f}{\partial z}(z_0, t) \quad \text{wegen } (*).$$

Es gilt: $\sup_{t \in [a, b]} |S_k(t) - \frac{\partial f}{\partial z}(z_0, t)|$

$$\leq \sup_{t \in [a, b]} \int_0^1 \left| \frac{\partial f}{\partial z}(z_0 + sh_k, t) - \frac{\partial f}{\partial z}(z_0, t) \right| ds$$

$k \rightarrow \infty \rightarrow 0$, da $\frac{\partial f}{\partial z}$ stetig auf

$\overline{B(z_0)} \times [a, b]$ ist.

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}$ gleichmässig stetig auf

$\overline{B(z_0)} \times [a, b]$ ist.

$\Rightarrow$

$S_k(\cdot) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{\partial f}{\partial z}(z_0, \cdot)$ gleichmässig auf

$[a, b]$.

$$\Rightarrow \frac{F(z_0 + h_k) - F(z_0)}{h_k} = \int_a^b \frac{f(z_0 + h_k t) - f(z_0) t}{h_k} dt = \int_a^b S_k(t) dt$$

Ansatz

-24-

$$\rightarrow \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(z_0, t) dt$$

$h \rightarrow 0$ beliebig

$$\Rightarrow \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(z_0, t) dt$$

Korollar 9.4 (Goursat). Sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, U offen. Dann ist $f': U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, ...

..., $f^{(n)}: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, ... $\forall n \in \mathbb{N}$.

Weiterhin gilt: Sei $B_r(m) \subseteq U$. Dann gilt:

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B_r(m)} \frac{f(z) dz}{(z-w)^{n+1}}$$

Beweis: Cauchy Integral formel. Es gilt: für $\sigma: [0, 2\pi] \rightarrow \partial B_r(m)$
 $\sigma(t) = m + re^{i2\pi t}$

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(m)} \frac{f(z) dz}{z-w} \quad \forall w \in B_r(m); \quad \overline{B_r(m)} \subseteq U.$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f(m + re^{i2\pi t}) \cdot 2\pi i r e^{i2\pi t} dt}{(m + re^{i2\pi t} - w)}$$

$$= \int_0^1 \ell(w, t) dt \quad (*)$$

Mit $l: B_r(m) \times [0, 7] \rightarrow \mathbb{C}$,

$$l(\omega, t) = \frac{f(m + re^{i2\pi t}) \cdot re^{i2\pi t}}{m + re^{i2\pi t} - \omega}.$$

l ist stetig; und l ist komplex differenzierbar in der ersten Variable, und $\frac{\partial l}{\partial \omega}(\omega, t)$

$$= \frac{f(m + re^{i2\pi t}) \cdot re^{i2\pi t}}{(m + re^{i2\pi t} - \omega)^2} \quad (**)$$

d.h. $\frac{\partial l}{\partial \omega}: B_r(m) \times [0, 7] \rightarrow \mathbb{C}$ ist stetig

Hilfssatz $\Rightarrow f: B_r(m) \rightarrow \mathbb{C}$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(m)} \frac{f(z)}{(z - \omega)} dz \quad \text{ist holomorph}$$

$$\begin{aligned} \text{mit } f'(\omega) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\frac{\partial l}{\partial \omega}(\omega, t) dt}{1} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)}{(\sigma(t) - \omega)^2} dt \quad (\text{von } (**)) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(m)} \frac{f(z)}{(z - \omega)^2} dz \end{aligned}$$

26

Dieses Argument können wir wiederholen:

$$\Rightarrow f''(w) = \frac{2}{2\pi i} \int_{\partial B_r(m)} \frac{f(z)}{(z-w)^3} dz$$

und so weiter

$$\Rightarrow f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B_r(m)} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} dz$$

$\forall w \in U$ finden wir immer einen Ball $B_r(m)$
mit $w \in B_r(m)$, $\overline{B_r(m)} \subseteq U$.
d.h. f ist beliebig oft komplex diff.
 $\forall w \in U$.

□

Satz 9.5 Liouville :

Sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| \leq k < \infty. \quad \text{Dann gilt}$$

$$f = \text{konst.}$$

Beweis : Sei $R > 0$ groß, so dass $w \in B_R(0)$ ist

Dann gilt von kor. 9.4 :

$$f'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(0)} \frac{f(z)}{(z-w)^2} dz$$



$$\Rightarrow |f'(w)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \sup_{z \in \partial B_R(0)} \left| \frac{f(z)}{(z-w)^2} \right| \cdot L(\partial B_R(0))$$

$$\begin{aligned} |z-w| &\geq ||z|-|w|| \\ &\geq |R-|w|| \\ &\leq R-|w| \\ &= R-|w| \end{aligned}$$

und umgekehrt.

$$\begin{aligned} &\leq \frac{2\pi R}{2\pi} \cdot k \sup_{z \in \partial B_R(0)} \frac{1}{|z-w|^2} \\ &= R \cdot k \cdot \sup_{z \in \partial B_R(0)} \frac{1}{R^2 - 2R|w| + |w|^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R &\rightarrow \infty \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f' \equiv 0 \text{ auf } \mathbb{C} \Rightarrow f = \text{konst.}$$

$$(f(z) = f(0) \quad \forall z \in \mathbb{C}),$$

da $\mathbb{C}$ z.h.g.d.

Satz 9.6: (über Nullstellen von Polynomen):

Sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ein Polynom ohne Nullstellen
 $(f(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C})$. $f(z) = \sum_{k=0}^N a_k z^k, N \in \mathbb{N}_0$.
 $a_N \neq 0$.
 Dann gilt $f = \text{const}$. d.h. $f(z) = a_0 \quad \forall z \in \mathbb{C} (N=0)$.

Beweis: f ist holomorph auf $\mathbb{C}$, $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow \frac{1}{f}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph.

$\Rightarrow \frac{1}{f}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist beschränkt:

(sonst gehe $z_k \in \mathbb{C}$ mit $\left| \frac{1}{f(z_k)} \right| \rightarrow \infty$

$\Rightarrow |f(z_k)| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. Fall 1:

$\exists R > 0$ mit $z_k \in B_R(0) \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ Teilfolge $z_{k_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} z \in \mathbb{C}$

$|f(z_{k_j})| \rightarrow 0$
 $\Rightarrow |f(z)| = 0$

Fall 2
 d.h. $\exists$ Teilfolge z_{k_j} mit $|z_{k_j}| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty$

$$\Rightarrow |f(z_{k_j})| = \left| \sum_{l=0}^N a_l z_{k_j}^l \right| \geq |a_N| |z_{k_j}|^N - \sum_{l=0}^{N-1} |a_l| |z_{k_j}|^l$$

$\xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty$

es sei dann f konstant ist $\Leftrightarrow n=0$. - 29 =
(und dann sind wir fertig).

$$\text{Liouville 9.5} \Rightarrow \frac{1}{f} = \text{konstant}$$

$\Rightarrow f$ konstant wie erwünscht.

Korollar 9.7 (Fundamentalsatz der Algebra)

-30-

Sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n \quad \text{mit } a_N \neq 0, \quad N \geq 1.$$

Dann gilt:

$$f(z) = (z - z_0)^{n_0} (z - z_1)^{n_1} \cdots (z - z_r)^{n_r} a_N$$

woher $z_i \neq z_j \quad \forall \quad i \neq j, \quad i, j \in \{0, \dots, r\}$,

$n_0 + n_1 + \dots + n_r = N$, und die Menge von
Paaren $\{(z_0, n_0), \dots, (z_r, n_r)\}$ ist eindeutig,

($\Rightarrow r \in \mathbb{N}$ ist auch eindeutig).

Erinnerung: für $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ein Polynom,

$$f(z) = \sum_{n=0}^M a_n z^n, \text{ ist}$$

$$\deg(f) = \max \{N \in \{1, \dots, M\} \mid a_N \neq 0\}.$$

Falls $\deg(f) = 0$, dann ist $f(z) = a_0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$,
d.h. f ist konstant.

-3 *

Beweis : Falls $f(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n$ keine Nullstellen hat,

dann gilt $f = \text{konst.}$ von Satz 9.6.

Dies ist ein Widerspruch, da $N \geq 1$. Also, f hat mindestens eine Nullstelle z_0 : $f(z_0) = 0$.

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n$$

$$= \sum_{n=0}^N a_n z^n - \sum_{n=0}^N a_n (z_0)^n$$

$$= \sum_{n=0}^N a_n (z^n - (z_0)^n)$$

$$= \sum_{n=1}^N a_n (z^n - (z_0)^n)$$

$$= \sum_{n=1}^N a_n (z - z_0) (z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \dots + (z_0)^{n-2} z + (z_0)^{n-1})$$

$$= (z - z_0) \underbrace{\sum_{n=1}^N a_n (z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \dots + (z_0)^{n-2} z + (z_0)^{n-1})}_{g(z)}$$

$g(z)$ ist ein Polynom grades $N-1$:

$$g(z) = \underbrace{a_N z^{N-1}}_{N\text{te Term}} + \underbrace{a_N z_0}_{(N-1)\text{te Term}} z^{N-2} + \dots + \underbrace{a_N (z_0)^{N-2} z + a_N (z_0)^{N-1}}_{(N-1)\text{te Term}} + \dots$$

(1) = Polynom von Grad $\leq N-2$

-32⁴

$$+ \underbrace{a_N \cdot z^{N-1}}$$

und $a_N \neq 0$.

Jetzt induktiv vorgehen:

$$\Rightarrow f(z) = (z-z_0)^{n_0} (z-z_1)^{n_1} \cdots (z-z_r)^{n_r} \cdot z_{r+1} \quad (1)$$

Es gilt: $n_0 + n_1 + \cdots + n_r = W$, und

$$z_{r+1} = a_N \text{ durch Vergleich}$$

$$\text{mit } f(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n.$$

$$\text{falls } f(z) = (z-\tilde{z}_0)^{\tilde{n}_0} (z-\tilde{z}_1)^{\tilde{n}_1} \cdots (z-\tilde{z}_\ell)^{\tilde{n}_\ell} \cdot a_N \quad (2)$$

eine andere Darstellung ist, mit $\tilde{z}_i \neq \tilde{z}_j \quad \forall i \neq j, i, j \in \{0, \dots, \ell\}$,

$$\text{dann gilt } \{z_0, \dots, z_r\} = \{\tilde{z}_0, \dots, \tilde{z}_\ell\}$$

(und somit $\ell=r$): sonst, falls zum Beispiel

$$\tilde{z}_i \notin \{z_0, \dots, z_r\}, \text{ dann setze}$$

$\tilde{z}_i$ in (2) ~~gegen~~ $\rightarrow$ liefert 0, aber

$\tilde{z}_i$ in (1) liefert eine komplexe Zahl $\neq 0 \Rightarrow \exists$.

-33-

Es gilt auch $n_i = \tilde{n}_i$ falls z.B. $n_i > \tilde{n}_i$,

dann differenzieren (1) und (2) bezüglich $\tilde{n}_i$ und
 auf die Stelle $z_i = \tilde{z}_i$ liefert 0 für (1)
 beziehungsweise eine komplexe Zahl $\neq 0$ für (2)

$\Rightarrow \{$



(es sei denn f konstant ist!)
 (Liouville, 9.5) $\Leftrightarrow n=0$
 $\Rightarrow \frac{1}{f}$ konstant $\square$
 $\Rightarrow f$ konstant

Satz 9.8 (Morera)

Sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig,

$U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Dann gilt:

f ist holomorph $\Leftrightarrow \int_{\partial I} f(z) dz = 0 \quad \forall$
 I

Rechtecken $I \subseteq U$.

(auch Integralsatz)

Beweis: $(\Rightarrow)$ folgt

$\Rightarrow$ von Satz 8.71, der: $I \subseteq M$ ist zusammenziehbar $\Rightarrow \int_I f(z) dz = \int_I f(z) dz = 0$

$(\Leftarrow)$: Für $m \in U$

Sei $B_\varepsilon(m) \subseteq U$ von Lemma 7.25

$f|_{B_\varepsilon(m)}: B_\varepsilon(m) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph besitzt eine Stammf.

$F: B_\varepsilon(m) \rightarrow \mathbb{C}$

von Goursat (9.4) $\Rightarrow F': B_\varepsilon(m) \rightarrow \mathbb{C}$

ist auch holomorph. Aber $f = F': B_\varepsilon(m) \rightarrow \mathbb{C}$

(F ist eine Stammf.) $\Rightarrow f: B_\varepsilon(m) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph.

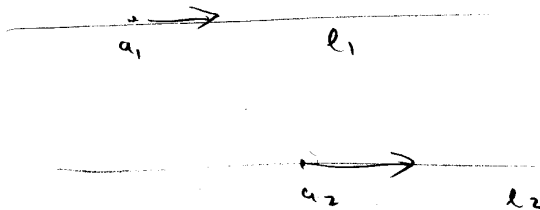
$m \in U$ war beliebig.

Korollar 9.9: Sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig,

U offen, und $f|_{U \setminus (l_1 \cup \dots \cup l_N)} \rightarrow \mathbb{C}$
 $U \setminus (l_1 \cup \dots \cup l_N)$

holomorph, wobei $l_i = \{a_i + t \mid t \in \mathbb{R}\}$

(Linien parallel zur Reellen Achse sind) $a_i \in \mathbb{C}, i=1, \dots, N$



Dann ist $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph.

Dieses Korollar und 9.8

benutzen Lemma 7.25.

Beweis Van der Waerden 9.9:

Sei $p \in M \cap l_i$ für ein $i \in \{1, \dots, N\}$.

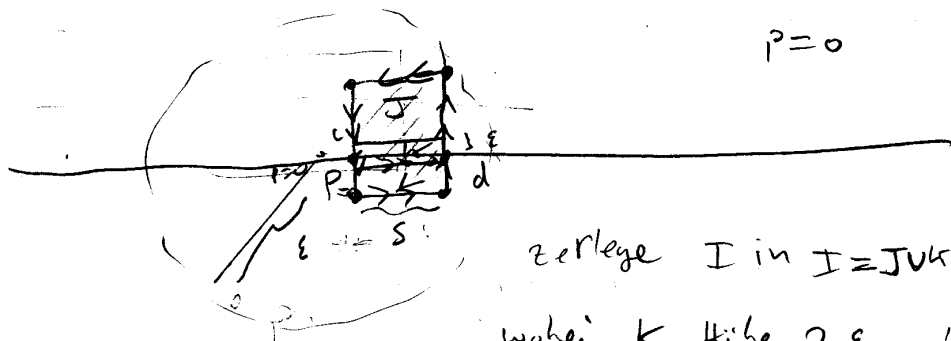
Wähle ε klein, so dass $B_\varepsilon(p) \cap l_j = \emptyset \quad \forall j \neq i$,

und so dass $B_\varepsilon(p) \subseteq U$.

Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow B_\varepsilon(p)$ ein Rechteckweg mit
zugehörigen Rechteck I . Falls $I \cap l_i = \emptyset$, dann ist

(Murren) $\Rightarrow \int_\gamma f(z) dz = 0$, da $f: B_\varepsilon(p) \setminus l_i \rightarrow \mathbb{C}$
 γ

holomorph ist. Sonst sieht es so aus: o.B.d. ist



zerlege I in $I = J \cup K \cup L \cup M$

woher K Höhe 2ε

und Breite s hat

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_I f(z) dz &= \int_J f(z) dz + \int_K f(z) dz \\ &+ \int_L f(z) dz + \int_M f(z) dz \end{aligned}$$

von vorher (Murren) $\int_J f(z) dz = \int_K f(z) dz = 0$

$$\Rightarrow \int_I f(z) dz = \int_L f(z) dz + \int_M f(z) dz$$

- 37 -

f stetig auf $B_\varepsilon(p) \Rightarrow$

$$\int_{\partial K} f(z) dz \rightarrow \int_{\alpha} f(z) dz + \int_{\hat{\alpha}} f(z) dz$$

als $\varepsilon \rightarrow 0$, wobei α g-p-Linie
von c nach d , $\hat{\alpha}$ g-p-Linie von d nach c

$$= \int_{\alpha} f(z) dz - \int_{\alpha} f(z) dz = 0$$

$$\Rightarrow \int f(z) dz = 0 \text{ auch.}$$

$\frac{\partial I}{\partial \bar{z}}$
(Morera)

$\Rightarrow f$ holomorph auf $B_\varepsilon(p)$.

Für $p \in U \setminus \{l_1 \cup \dots \cup l_N\}$ ist

$$f: B_\varepsilon(p) \rightarrow \mathbb{C}$$

holomorph falls $\varepsilon > 0$ klein genügt ist

so dass, $B_\varepsilon(p) \subseteq U \setminus \{l_1 \cup \dots \cup l_N\}$.

Daher ist f auf ganz U holomorph. 

10. Potenzreihen und kompakte Konvergenz - 38 -

Defn. 10.1 : Sei $f_i: U \rightarrow \mathbb{C}$, U offen, $i \in \mathbb{N}$.

$f_i \xrightarrow[\text{kompakt}]{i \rightarrow \infty} f$ bedeutet: $\forall K$ kompakt,

$K \subseteq U$, $f_i|_K: K \rightarrow \mathbb{C}$ erfüllt

$f_i|_K \xrightarrow[\text{gleichmässig auf } K]{i \rightarrow \infty} f|_K$.

D.h. $\sup_{p \in K} |f_i(p) - f(p)| \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$.

von Ana II wissen wir: falls $g_i: K \rightarrow \mathbb{C}$ stetig

und $g_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} g$, K kompakt, $g: K \rightarrow \mathbb{C}$ eine Fk.,

dann ist g stetig. Insbesondere: falls $f_i: U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig

in der Defn. oben, und $f_i \xrightarrow[\text{kompakt}]{i \rightarrow \infty} f$

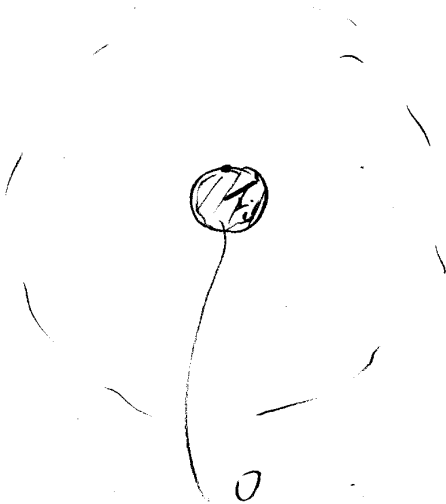
$\Rightarrow f: U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig.

Beispiel kompakter Konvergenz

- 38 $\frac{1}{4}$ -

$$f_i: B_1(0) \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$f_i(z) = \begin{cases} \frac{1}{z - \frac{1}{i}} & , 1 > |z| > \frac{1}{i} \\ 0 & , |z| \leq \frac{1}{i} \end{cases}$$



$$f_i \xrightarrow[\text{kompakt}]{i \rightarrow \infty} f, \quad \text{wobei } f: B_1(0) \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C},$$

$$f(z) = \frac{1}{z}.$$

$$\text{Sei } p \in B_1(0) \setminus \{0\} \Rightarrow \overline{B_\varepsilon(p)} \subseteq B_1(0) \setminus \{0\}$$

$$\text{für } \varepsilon = |p|/2 \quad (\text{dies ist } > 0)$$



$$\text{und } |z| \geq \frac{|p|}{2} > 0 \quad \forall z \in \overline{B_\varepsilon(p)}$$

$$\sup_{z \in \overline{B_\varepsilon(p)}} |f_n(z) - f(z)|$$

$$= \sup_{z \in \overline{B_\varepsilon(p)}} \left| \frac{1}{z^{-1/n}} - \frac{1}{z} \right|$$

$$= \sup_{z \in \overline{B_\varepsilon(p)}} \left| \frac{z - z + \frac{1}{n}}{z(z + \frac{1}{n})} \right|$$

$$\leq \sup_{z \in \overline{B_\varepsilon(p)}} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{|z|(|z| + \frac{1}{n})} \right)$$

für n groß
ist $|z| \geq |p|$

$$= \sup_{z \in \overline{B_\varepsilon(p)}} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\frac{|p|}{2} \left(\frac{|p|}{2} + \frac{1}{n} \right)} \right)$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{kompakt}} f$, da jede kompakte

$-38\frac{3}{4}-$

Menge $K \subseteq M$ kann man mit endlich vielen Bällen

$$K \subseteq B_{\varepsilon_1/2}(p_1) \cup \dots \cup B_{\varepsilon_N/2}(p_N)$$

$$\subseteq \overline{B_{\varepsilon_1}(p_1)} \cup \dots \cup \overline{B_{\varepsilon_N}(p_N)}$$

überdecken, mit $\overline{B_{\varepsilon_i}(p_i)} \subseteq M$

$\forall i=1, \dots, N.$

Aber: $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ gleichmäßig auf M ist Falsch:

$$f_n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}} = n^2$$

$$f\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = f\left(\frac{n+1}{n^2}\right) = \frac{n^2}{n+1}$$

$$\Rightarrow \left| f_n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) - f\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \right| = \left| n^2 - \frac{n^2}{n+1} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

(39-

Satz 10.2: Sei $f_i: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $i \in \mathbb{N}$,
 und $f_i \xrightarrow[\text{komp.}]{i \rightarrow \infty} f$, wobei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine
 komplex wertige Fn. ist. Dann ist a) $f: U \rightarrow \mathbb{C}$
 holomorph, und b) $f_i^{(n)} \xrightarrow[\text{komp.}]{i \rightarrow \infty} f^{(n)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$,

wobei für $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph,

$g^{(n)}: U \rightarrow \mathbb{C}$ die Fn.

$$g^{(n)}(z) = \underbrace{g' \dots'}_{n\text{-mal}}(z) \quad \text{ist.}$$

Beweis: Sei $\overline{B}_E(p) \subseteq B_{2E}(p) \subseteq U$, und

$\gamma: [a, b] \rightarrow B_E(p)$ ein beliebiger
 Rechteckweg in $B_E(p)$. von Morera wissen wir:

$$0 = \int_{\gamma} f_i(z) dz \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f(z) dz$$

$$\text{da } 0 = \int_a^b f_i(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

wobei die Integralkonvergenz von der

Tatsache folgt, dass $f_i|_{\overline{B}_E(p)} \rightarrow f$

komp. vergiert gleichmässig geg. $f|_{\overline{B}_E(p)}: \overline{B}_E(p) \rightarrow \mathbb{C}$

und die $f_i|_{\overline{B}_E(p)}: \overline{B}_E(p) \rightarrow \mathbb{C}$ stetig sind
 $(\Rightarrow f|_{\overline{B}_E(p)}: \overline{B}_E(p) \rightarrow \mathbb{C} \text{ stetig})$

*: Anst II: $f_i: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und f_i konvergiert $\rightarrow 40$ -
gleichmäßig gegen $l: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$

$$\Rightarrow \int_a^b f_i(t) dt = \int_a^b l(t) dt$$

D.h. $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ $\forall$ Rechteckwege in $B_{\varepsilon}(p)$.

moreover nochmal

$\Rightarrow f$ holomorph; dies ist a)

b). Sei $p \in M$ beliebig und $\varepsilon > 0$ mit
 $\overline{B_{\varepsilon}(p)} \subseteq U$.

(9.4) $\Rightarrow$ $f_i^{(n)}|_{B_{\varepsilon}(p)} : B_{\varepsilon}(p) \rightarrow \mathbb{C}$ ist

$$(f_i)^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B_{\varepsilon}(p)} \frac{f_i(z)}{(z-w)^{n+1}} dz \quad \forall w \in B_{\varepsilon}(p)$$

Sei $w \in \overline{B_{\varepsilon/2}(p)}$. Dann ist

$|z-w| \geq \varepsilon/2 \quad \forall z \in \partial B_{\varepsilon}(p)$, und folglich:

$$\left| (f_i)^{(n)}(w) - (f)^{(n)}(w) \right| = \frac{n!}{2\pi i} \left| \int_{\partial B_{\varepsilon}(p)} \frac{f_i(z) - f(z)}{(z-w)^{n+1}} dz \right|$$

$$\leq \frac{n!}{2\pi i} L(\partial B_\varepsilon(p)) \cdot \sup_{z \in \partial B_\varepsilon(p)} \frac{|f_i(z) - f(z)|}{|z - \omega|^{n+1}} - 4\delta -$$

$$\leq \frac{n!}{2\pi i} 2\pi \cdot \varepsilon \cdot \left(\frac{z}{\varepsilon}\right)^{n+1} \cdot \sup_{z \in B_\varepsilon(p)} |f_i(z) - f(z)|$$

$$\begin{aligned} i &\rightarrow \infty \\ &\rightarrow 0, \text{ da} \end{aligned}$$

$$f_i \xrightarrow[\text{kompakt}]{i \rightarrow \infty} f$$

$$\Rightarrow (f_i)^{(n)} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} f^{(n)} \text{ gleichm\"assig auf } \overline{B_{\varepsilon/2}(p)}.$$

Jede kompakte Menge $K \subseteq M$ kann man durch endlich viele B\"alle $B_{(\varepsilon_i/4)}(p_i) \subseteq M, i=1, \dots, N$ $\overline{K}$ bedecken, $K \subseteq \bigcup_{i=1}^N B_{(\varepsilon_i/4)}(p_i)$, mit $\overline{B_{\varepsilon_i}(p_i)} \subseteq M$.

$$\text{D.h. } (f_i)^{(n)} \xrightarrow[\text{K}]{i \rightarrow \infty} f^{(n)} \text{ D.h.}$$

$$(f_i)^{(n)} \xrightarrow[\text{kompakt}]{i \rightarrow \infty} f^{(n)}, \text{ wie erw\"unscht.}$$

□