

Korollar 10.3 : (Potenzreihen Entwicklung):

Sei $f: B_\delta(p) \rightarrow \mathbb{C}$.

f ist holomorph $\Leftrightarrow \exists a_i \in \mathbb{C}, i \in \mathbb{N}_0$ mit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n \quad \forall z \in B_\delta(p)$$

(insbesondere die rechte Seite hat Konvergenzradius $R \geq \delta$).

Beweis: ($\Leftarrow$) haben wir schon gesehen in Satz 5.4.

($\Rightarrow$): O.B.d.A ist $p=0$. Für $w, z \in \mathbb{C}$ mit $|w| < |z|$ gilt:

$$\frac{1}{(z-w)} = \frac{1}{z} \left(\frac{1}{1-(w/z)} \right) \stackrel{\text{geom. Reihe}}{=} \frac{1}{z} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{w}{z} \right)^i \right)$$

(konvergiert absolut, da $\left| \frac{w}{z} \right| < 1$).

Insbesondere: Für $z \in \partial B_r(0)$, $r < \delta$,
und w mit $|w| = r - \epsilon$ ist $\frac{w}{z} \in B_{1-\frac{\epsilon}{r}}(0)$

$\Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{w}{z} \right)^i$ konvergiert gleichmäßig:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N, \text{ so dass } \left| \underbrace{\sum_{i=0}^n \left(\frac{w}{z} \right)^i}_{S_n(z)} - \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{w}{z} \right)^i \right| < \epsilon$$

$\forall z \in \partial B_r(0) \quad \forall n \geq N, \quad \forall w \in B_{r-\epsilon}(0).$

Cauchy: Integral Formel ^{q. 2} ist

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{(z-w)} dz \quad ; \text{ sie ist}$$

gültig $\forall w \in B_r(0)$ (Bemerkung: $\overline{B_r(0)} \subseteq B_S(p)$, und $f: B_S(p) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, also ist ~~q. 2~~ anwendbar)

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \left[\frac{f(z)}{z} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{w}{z} \right)^i \right] dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(z) \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{w}{z} \right)^i}{z} dz$$

$$\Rightarrow \left| f(w) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(z)}{z} s_n(z) dz \right|$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \left| \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(z)}{z} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{w}{z} \right)^i - s_n(z) \right) dz \right|$$

(Propn 7.5)

$$\leq \frac{1}{2\pi} |L(\partial B_r(0))| = 2\pi r \leq \left(\frac{1}{2\pi i} \sup_{z \in \partial B_r(0)} \frac{|f(z)|}{|z|=r} \right) \cdot \left| \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{w}{z} \right)^i - s_n(z) \right|$$

$$\leq \sup_{z \in \partial B_r(0)} |f(z)| \cdot \varepsilon$$

$$\forall n \geq N \quad \forall w \in B_{r-\varepsilon}(0)$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow f(w) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(z)}{z} \sum_{j=0}^n \left(\frac{w}{z}\right)^j dz \quad -44- \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^n \left(w^j \cdot \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(z)}{z^{j+1}} dz \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{\infty} \left(w^j \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(z)}{z^{j+1}} dz \right) \quad \forall w \in B_r(0)
 \end{aligned}$$

und dies ist eine Potenzreihenentwicklung von f .
 Von Goursat (kor. 9.4) ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(z)}{z^{j+1}} dz = \frac{1}{j!} f^{(j)}(0) \quad (\text{jte Ableitung})$$

D.h. wir haben die Taylorreihe Entwicklung

$$f(w) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(p)}{j!} (w-p)^j \quad (p=0 \text{ hier})$$

$r < \delta$ war beliebig $\Rightarrow$ dies gilt auf $B_\delta(p)$

D.h. der Konvergenzradius R von $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} w^j$

erfüllt $R \geq \delta$. Dadurch sehen wir auch,

dass die Konvergenz gleichmässig und absolut auf $B_p(0)$ ist für $p < \delta$ (Satz 5.4)

Korollar 10.4 (über ~~der~~ Taylorreihe Entwicklung einer holomorphen Funktion)

Sei $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und

$B_\delta(p) \subseteq M$. Dann gilt:

$$f(w) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(p)(w-p)^j}{j!} \quad \forall w \in B_\delta(p). \quad (10.1)$$

Die Konvergenz ist gleichmäßig und absolut auf $\overline{B_\sigma(p)}$ $\forall \sigma < \delta$.



11 Lokale Struktur holomorpher Funktionen: - 45

Defn. 11.1: Sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, U offen, $p \in U$ mit $f(p) = 0$. p heißt Nullstelle von f .

Angenommen: $\exists \varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(p) \subseteq U$

und $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in B_\varepsilon(p) \setminus p$, dann

heißt p eine isolierte Nullstelle von f .

Pist eine nicht isolierte Nullstelle, falls $\forall \varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(p) \subseteq U \quad \exists z \in B_\varepsilon(p) \setminus p$ mit $f(z) = 0$.

Defn. 11.2: Sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, Bil d.

U offen, $p \in U$ eine Nullstelle von f .

Falls $\exists \varepsilon > 0$, so dass $f|_{\overline{B_\varepsilon(p)}} \equiv 0$

er folgt $f|_{\overline{B_\varepsilon(p)}} \equiv 0$, dann ist die

Ordnung _{f} (p) = ∞ .

Sonst wird die Ordnung _{f} (p) wie folgt

definiert: von (10.7) gilt:

$$f(w) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(p)}{j!} (w-p)^j \quad \text{auf } \overline{B_\delta(p)}$$

woher δ klein ist, so dass $\overline{B_\delta(p)} \subseteq U$.

$$f(p) = 0 \Rightarrow$$

$$f(w) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f^{(j)}(p)}{j!} (w-p)^j \quad \forall w \in \overline{B_\delta(p)}$$

und $f|_{\overline{B_\delta(p)}} \neq 0$ (Voraussetzung) (d.h. nicht identisch null).

$$\Rightarrow \exists j \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad f^{(j)}(p) \neq 0$$

(sonst ist $f(w) = 0$ auf $\overline{B_\delta(p)}$ ~~gültig~~).

$$\text{Sei} \quad N = \min \{j \in \mathbb{N} \mid f^{(j)}(p) \neq 0\}$$

$$\Rightarrow N = \text{Ordnung von } p. \quad (N \geq 1)$$

$$N = \text{Ordnung}_f(p).$$

Es gilt:

$$f(w) = \sum_{j=N}^{\infty} \frac{f^{(j)}(p)}{j!} (w-p)^j \quad (11.1) \quad (*)$$

$$\forall w \in \overline{B_\delta(p)}.$$

Lemma 11.3 : Sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph

(U offen) mit Nullstelle in p Ordnung $\neq \infty$.

Dann gilt: $\exists$ eindeutiger Holomorphe g .

$g: U \rightarrow \mathbb{C}$ und $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit

$$g(p) \neq 0 \text{ und } f(z) = (z-p)^N g(z) \quad \forall z \in U.$$

Es gilt ausserdem Ordnung $f(p) = N$.

Beweis : Sei $g: U \rightarrow \mathbb{C}$,

$$g(w) := \begin{cases} \frac{f(w)}{(w-p)^N} & \forall w \neq p \quad (*) \\ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i+N)}(p)(w-p)^i}{(i+N)!} & \forall w \in B_\varepsilon(p) \quad (**) \end{cases}$$

woher $\overline{B_\varepsilon(p)} \subseteq U$.

Beide Fn. $(*)$ und $(**)$ sind holomorph

und stimmen auf $B_\varepsilon(p) \setminus \{p\}$ überein,

wegen (17.1): $(**)$ konvergiert auf
 $B_\varepsilon(p)$ wegen (17.1) $\Rightarrow$ g
 (Satz 5.4)

holomorph auf $B_\varepsilon(p) \Rightarrow g$

holomorph auf U , da $\overline{f(\cdot)}_{(\cdot-p)^k}$ holomorph

auf $U \setminus \{p\}$ ist.

Es gilt auch

$$g(p) = \frac{f^{(N)}(p)}{N!} \neq 0, \text{ da } N = \text{ord}_p(p),$$

-48-

Falls es noch so eine fn. $\tilde{g} : M \rightarrow \mathbb{C}$

gibt mit $f(z) = (z-p)^k \tilde{g}(z)$ auf M ,

und zum Beispiel $k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow f^{(k)}(p) = \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{(k)} \left((z-p)^N \cdot g(z) \right) \Big|_p$$

$$= 0$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{(k)} \left((z-p)^k \cdot \tilde{g}(z) \right) \Big|_p$$

$$= k! \tilde{g}(p) \neq 0.$$

$$\Rightarrow \{ \}$$

Ähnlich $k > N \Rightarrow f^{(N)}(p) = \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{(N)} \left((z-p)^N \cdot g(z) \right) \Big|_p$

$$= N! g(p) \neq 0$$

$$\Rightarrow \{ \}.$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^N \left((z-p)^k \cdot \tilde{g}(z) \right) \Big|_p \equiv 0.$$

Also $k=N$.
 $g, \tilde{g}$ holomorph $\Rightarrow g, \tilde{g}: U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig.

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-p)^N} = \tilde{g}(z) \quad \forall z \neq p$$

(Stetigkeit in p)

$$\Rightarrow g(p) = \tilde{g}(p) \text{ i.e. } g \equiv \tilde{g}.$$

□

Satz 11.4 : Sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$

holomorph, $f(p) = 0$ ($p \in U$). Es gilt genau eine von den zwei Aussagen:
 • a) p ist eine isolierte Nullstelle

von f oder b) $\exists \varepsilon > 0$ so daß

$f|_{B_\varepsilon(p)} \rightarrow \mathbb{C}$ identisch null

ist: $(f|_{B_\varepsilon(p)} \equiv 0)$.

Beweis: Falls $\text{ordnung}_p = \infty$, dann
 per Defn. $\exists \overline{B_\varepsilon(p)} \subseteq M$ mit

$$f|_{\overline{B_\varepsilon(p)}} \equiv 0 \Rightarrow (b).$$

Angenommen $\text{ordnung}_p = N < \infty$.

Dann gilt: (von Lemma 11.3)

$$f(z) = (z-p)^N g(z) \quad \forall z \in U$$

wobei g holomorph $g(p) \neq 0$.

$$g \text{ stetig} \Rightarrow \exists B_\varepsilon(p) \subseteq U$$

$$\text{mit } g(z) \neq 0 \quad \forall z \in B_\varepsilon(p)$$

$$\Rightarrow f(z) = (z-p)^N g(z) \neq 0$$

$$\forall z \in B_\varepsilon(p) \setminus \{p\}$$

$\Rightarrow$ isolierte Nullstelle von f .



Korollar 11.5: Sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, U offen und zingel, und $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq U$, $x \in U$ mit: $x_k \neq x \forall k \in \mathbb{N}$,
 $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$, $f(x_k) = 0 \forall k \in \mathbb{N}$.
 Dann gilt

$$f \equiv 0 \text{ auf } U.$$

Beweis: Sei $x_k \in U$ eine Folge von nicht isolierten Nullstellen von f , $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x \in U$.

Dann ist $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = 0$, und

x ist eine nicht isolierte Nullstelle von f per Beh.

Sei $N = \{x \in U \mid x \text{ nicht isolierte Nullstelle}\}$

Wir haben gerade gezeigt, dass

$$U \cap \overline{N} \subseteq N. \quad \text{Es gilt auch}$$

$$N \subseteq \overline{N \cap U} \subseteq \overline{N} \cap U$$

$$\Rightarrow N = U \cap \overline{N}.$$

Es gilt auch in dieser Situation

- 53 -

V ist offen (dies folgt von der Tatsache, dass f holomorph ist, wie wir gleich sehen werden).

Sei $x \in V \subseteq U$. von Satz 11.4

b) muss gelten, d.h. $\exists \varepsilon > 0$, so daß

$f|_{B_\varepsilon(p)} : B_\varepsilon(p) \rightarrow \mathbb{C}$ identisch Null ist.

$f|_{B_\varepsilon(p)} \equiv 0$. Aber dies impliziert: $\forall z \in B_\varepsilon(p)$

$\exists B_{\delta(z)}(z) \subseteq B_\varepsilon(p) \subseteq U$ mit $\delta(z) > 0$, so

daß $f|_{B_{\delta(z)}(z)} \equiv 0$.

$\Rightarrow z$ ist eine nicht isolierte Nullstelle.

D.h. V ist offen $\left(\begin{array}{l} p \in V \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \text{ mit} \\ B_\varepsilon(p) \subseteq V \end{array} \right)$.

D.h.:

$$U = (V \cup (V^c \cap M)) \quad (\text{von Schritt 1})$$

$$= V \cup ((U \cap \bar{V})^c \cap M)$$

$$= V \cup ((M^c \cup \bar{V})^c \cap M)$$

$$= V \cup ((\bar{V} \cap M) \cap M) = V \cup X, \quad X, Y \text{ offen.}$$

54-

M zugeh. $\Rightarrow (N \equiv \emptyset \text{ und } \gamma = \emptyset) \text{ oder } (X = U \text{ und } V = \emptyset)$.

Aber $p \in M$ ist eine nicht isolierte Nullstelle
 per Annahme $\Rightarrow V$ nicht leer $\Rightarrow V = M$.

d.h. Alle $z \in U$ sind nicht isolierte Nullstellen
 von F : insbesondere gilt es: $f(z) = 0$

$\forall z \in U$ wie erwünscht. $\square$

Korollar 11-6 : Identitätssatz. Seien

$f, g: U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph, U offen und
 zhnghd. Angenommen: $\exists \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq U, x \in U,$
 $x_k \neq x$ mit $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$ und $f(x_k) = g(x_k) \forall k \in \mathbb{N},$
 dann gilt: $f \equiv g$ auf U .

Beweis: Sei $h := f - g$. $h: U \longrightarrow \mathbb{C}$
 holomorph. $h(x_k) = 0, x_k \neq x \forall k \in \mathbb{N}, x_k \rightarrow x,$
 $x \in U$. D.h. h erfüllt den Bedingungen von
 Kor 11.5. $\Rightarrow h \equiv 0 \Rightarrow f \equiv g$ auf U .

□

Def. 11.7. i) (X, x) ist eine punktierte Menge,
 wenn X eine Menge mit einem ausgezeichneten
 Punkt $x \in X$ ist. Mit $f: (X, x) \longrightarrow (Y, y)$
 meinen wir eine Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ mit
 $f(x) = y$. ii) Sei U offen $\subseteq \mathbb{C}, f: U \longrightarrow \mathbb{C}$
 holomorph. $f: U \longrightarrow \mathbb{C}$ ist eine
holomorphe Einbettung bedeutet: a)

$f: U \longrightarrow \mathbb{C}$ ist injektiv und b) $V := f(U) \subseteq \mathbb{C}$
 ist offen, und c) $f^{-1}: V \longrightarrow U \subseteq \mathbb{C}$ ist
 holomorph.

Notation: $f: U \hookrightarrow \mathbb{C}$ bedeutet $f: U \longrightarrow \mathbb{C}$
 ist eine holomorphe Einbettung.

Korollar 11.9: Sei $n \in \mathbb{N}_{n \geq 1}$ und

$l_n: B_r(0) \rightarrow B_r(0)$ die holomorphe Abbildung

$$l_n(z) = z^n. \quad \text{Für } n \geq 2 \text{ und}$$

$\forall z_0 \neq 0, z_0 \in B_r(0)$ gilt: es existiert eine

$B_\varepsilon(z_0) \subseteq B_r(0)$ ($\varepsilon = \varepsilon(z_0) > 0$), so dass

$$l_n|_{B_\varepsilon(z_0)}: B_\varepsilon(z_0) \rightarrow l_n(B_\varepsilon(z_0)) \subseteq \mathbb{C}$$

eine holomorphe Einbettung ist.

Aber: $\exists$ keine $\varepsilon > 0$, so dass $l_n: B_\varepsilon(0) \rightarrow B_\varepsilon(0)$
(wird) eine holomorphe Einbettung ist. $|_{B_\varepsilon(0)}$

$l_1 = \text{id}: B_r(0) \rightarrow B_r(0)$ ist trivialerweise
eine holomorphe Einbettung.

Beweis: $l_n'(z_0) = n(z_0)^{n-1} \neq 0$ falls $z_0 \neq 0$.

Lemma 11.8. $\Rightarrow \exists B_\varepsilon(z_0) \subseteq B_r(0)$, so dass

$$l_n|_{B_\varepsilon(z_0)}: B_\varepsilon(z_0) \rightarrow l_n(B_\varepsilon(z_0)) \text{ eine}$$

holomorphe Einbettung ist. Dies ist der erste Teil der Aussage.

$\forall z_0, l_n|_{B_\varepsilon(0)}: B_\varepsilon(0) \rightarrow B_\varepsilon(0)$ ist nicht surjektiv $\Rightarrow$ nächster
Teil der Aussage.

$\square$

Satz 11.10: (Lokalstruktur holomorpher Funktionen)

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $p \in U$ und
 $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. So gibt es
 holomorphe Einbettungen $g_1: (B_1(0), 0) \rightarrow (U, p)$
 und $g_2: (B_1(0), 0) \rightarrow (\mathbb{C}, f(p))$ und
 ein $n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \cup \{\infty\}$ derart, dass

$$\begin{array}{ccc} \text{kommutiert} & (U, p) & \xrightarrow{f} (\mathbb{C}, f(p)) \\ & \uparrow g_1 & \uparrow g_2 \\ & (B_1(0), 0) & \xrightarrow{l_n} (B_1(0), 0) \end{array}$$

wobei $l_n(z) = z^n$, und $l_\infty(z) = 0 \quad \forall z \in B_1(0)$.

Es gilt auch:

$$n = \inf \left\{ \nu \geq 1 \mid f^{(\nu)}(p) \neq 0 \right\} \quad \left(= \infty \text{ falls die Menge leer ist} \right)$$

Beweis: O.B.d.A. ist $p = f(p) = 0$:

Sonst untersuche $\tilde{f}: \tilde{U} = U - p \rightarrow \mathbb{C}$,
 $\tilde{f}(z) := f(z+p) - f(p)$, und beweise die
 Aussage zuerst für $\tilde{f}$: führt zu Abbildungen
 $\tilde{g}_1$ und $\tilde{g}_2$.

$$(\hat{u}, 0) \xrightarrow{\tilde{f}} (\Phi, 0)$$

—57—

$$\int \tilde{g}_1$$

$$\int \tilde{g}_2$$

$$(B_1(0), 0) \xrightarrow{\ell_n} (B_1(0), 0)$$

Dann setze $g_1(z) := \tilde{g}_1(z) + p$,

$$g_2(z) = \tilde{g}_2(z) + f(p) \Rightarrow \text{Resultat:}$$

$$g_2 \circ \ell_n(z) = \tilde{g}_2 \circ \ell_n(z) + f(p)$$

$$= \tilde{f} \circ \tilde{g}_1(z) + f(p)$$

$$= \tilde{f}(g_1(z) - p) + f(p)$$

$$= f(g_1(z)) - f(p) + f(p)$$

$$= (f \circ g_1)(z) \text{ wie erwünscht.}$$

Zwischen Dirin

- 7 1/2 -

Was bedeutet die Aussage?

Die Lokale kann man jede holomorphe Funktion als die Verkettung:

$$f \neq \tilde{u} \circ \mu \quad \Rightarrow \quad \alpha,$$

$$f = g_2 \circ \iota_n \circ (g_1)^{-1}, \text{ wobei hier}$$

g_2, g_1 sehr regulär sind

(einkbettungen) und $\iota_n : B_1(0) \rightarrow B_1(0)$

eine bekannte Funktion ist.

Natürlich sind für jede P mögliches

g_1, g_2 und ι_n anders ($n = n(P)$)

$$g_1 \neq g_{1,P} \quad g_2 \neq g_{2,P}$$

$$g_1 = g_{1,P} : (B_1(0), 0) \rightarrow (U, P),$$

$$g_2 = g_{2,P} : (B_1(0), 0) \rightarrow (A, f(P)).$$

Für $f(p) = p = 0$,

$$\text{ist } N = n = \inf \{ \nu \geq 1 \mid f^{(\nu)}(0) \neq 0 \}$$

$$= \text{Ordnung}_f(0).$$

Existenz von g_1, g_2 . Falls " $\exists \varepsilon > 0$ mit

$$f|_{B_\varepsilon(0)} : B_\varepsilon(0) \rightarrow \mathbb{C} \text{ mit } f|_{B_\varepsilon(0)} \equiv 0 "$$

dann setze $g_2(z) = z$, $g_1(z) = z \forall z \in B_\varepsilon(0)$

Fertig.

Sonst gilt:

$$f(z) = \sum_{j=N}^{\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} z^j \quad (\text{Taylorreihe})$$

(von (11.7)) auf $\overline{B_\delta(p)} \in \mathcal{U}$ mit

$$f^{(N)}(0) \neq 0: N = \text{Ordnung}_f(0).$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} a_{N+j} z^{j+N}, \text{ mit } a_\ell = \frac{f^{(\ell)}(0)}{\ell!},$$

$$= z^N \sum_{j=0}^{\infty} a_{N+j} z^j$$

$$= z^N g(z), \quad (*) \text{ mit}$$

$$g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{N+j} z^j \text{ auf } B_\delta(0),$$

$$g: B_\delta(0) \rightarrow \mathbb{C} \text{ ist holomorph.}$$

Und $g(0) = a_N = \frac{f^{(N)}(0)}{N!} \neq 0$. -59-

g stetig, $g(0) \neq 0 \Rightarrow$ durch Verkleinerung von $B_\delta(0)$ zu $B_{\tilde{\delta}}(0)$ (wenn nötig) können wir annehmen, dass

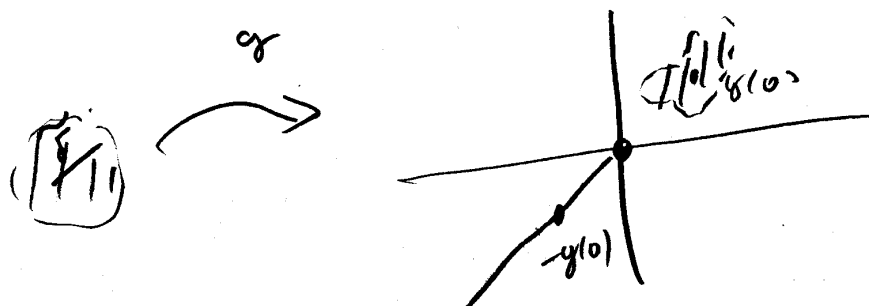
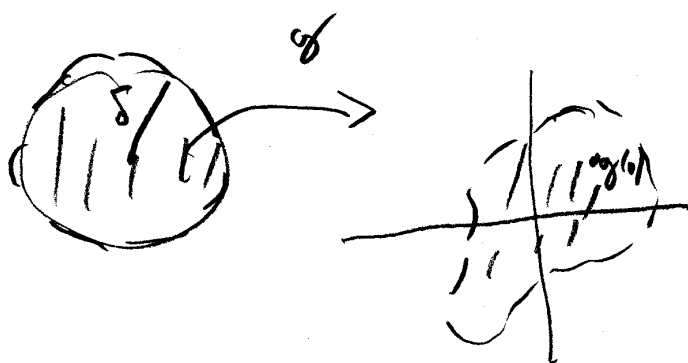
$$g(B_{\tilde{\delta}}(0)) \subseteq \mathbb{C} \setminus L_{\alpha+\pi}^+ \text{ eine geschnittene}$$

Ebene ist, wobei L^+ die Halblinie

$$L_{\alpha+\pi}^+ := \{ r(-g(0)) \mid r \geq 0 \}$$

$$= \{ r e^{i\alpha + i\pi} \mid r \geq 0 \} \text{ wobei}$$

$$g(0) = s_0 e^{i\alpha} \text{ für ein } s_0 > 0, \alpha \in [0, 2\pi).$$



zum Beispiel:

Im Fall $L_{\alpha+\pi}^+ = \mathbb{R}_0^+$, das ist

$$h(re^{i\alpha}) = \sqrt[n]{r} e^{\frac{i\alpha}{n}} \text{ wobei}$$

$$z = re^{i\alpha} \text{ erfüllt } r > 0, \alpha \in (0, 2\pi)$$

$$\text{Somit falls } L_{\alpha+\pi} = \{re^{i\alpha} \mid r > 0\} \text{ ist, } \alpha \in [0, 2\pi)$$

$z \in \mathbb{C} \setminus L_{\alpha+\pi}$ kann nun eindeutig als

$$r_0 e^{i\beta}, \beta \in (\alpha-\pi, \alpha+\pi)$$



Behauptung $r_0 > 0$

$$\text{Setze zum Beispiel: } h(r_0 e^{i\beta}) = \sqrt[n]{r_0} e^{\frac{i\beta}{n}}$$

$$\text{Dann gilt } (h(r_0 e^{i\beta}))^n = r_0 \cdot e^{i\beta}$$

-61-

Definiert sei $h: \mathbb{C} \setminus L_{\alpha+\pi}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ eine holom.
 n-ter Wurzel $\sqrt[n]{}$ d.h.

$$(h(z))^n = z \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus L_{\alpha+\pi}^+.$$

Definiere jetzt: $\ell: B_{\tilde{\delta}}(0) \rightarrow \mathbb{C}$ durch
 $\ell(z) := h(g(z))$. ℓ ist holomorph und
 wohl definiert und es gilt:

$$(\ell(z))^n = (h(g(z)))^n = g(z).$$

Dies, zusammen mit (*) $\Rightarrow$

$$f(z) \stackrel{(*)}{=} z^n g(z) = z^n (h(g(z)))^n$$

$$= (z \cdot h(g(z)))^n$$

$$= (s(z))^n \quad \forall z \in B_{\tilde{\delta}}(0),$$

woher $s(z) := z \cdot h(g(z)) \quad \forall z \in B_{\tilde{\delta}}(0)$.

($s: B_{\tilde{\delta}}(0) \rightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph). Es gilt:

$s'(0) = h(g(0)) \neq 0$, da $(h(g(0)))^n = g(0) \neq 0$.
 Von Lemma 11.8 $\exists \tilde{\delta} \leq \tilde{\delta}$, so dass

$s: B_{\tilde{\delta}}(0) \rightarrow s(B_{\tilde{\delta}}(0))$ eine Einsetzung ist.

Dies Diagram ist:

-62-

$$\begin{array}{ccc}
 u \in B_{\tilde{\delta}}(0) & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\
 \downarrow s & & \uparrow \text{id} \\
 v = s(B_{\tilde{\delta}}(0)) & \xrightarrow{\ell_n} & \ell_n(s(B_{\tilde{\delta}}(0)))
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{D.h. } \text{id}(\ell_n(s(z))) &= \ell_n(s(z)) = (s(z))^n \\
 &= f(z) \\
 &\quad \forall z \in B_{\tilde{\delta}}(0).
 \end{aligned}$$

$0 \in V$, da $s(0) = 0$. Sei $B_{\delta}(0) \subseteq V$, und

$g_1 = s^{-1} : B_{\delta}(0) \rightarrow s^{-1}(B_{\delta}(0))$.
 ($s^{-1}(B_{\delta}(0))$ ist offen, da s, s^{-1} stetig sind), und
 $0 \in s^{-1}(B_{\delta}(0))$. D.h. folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 (u, 0) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{C}, 0) \\
 \uparrow g_1 & & \uparrow g_2 = \text{id} \\
 (B_{\delta}(0), 0) & \xrightarrow{\ell_n} & (B_{\delta}(0), 0)
 \end{array}$$

Dies sieht nun so:

- 63 -

$z \in B_r(0)$ ist $s(w)$ für ein $w \in s^{-1}(B_r(0))$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \hat{g}_2 \circ \ln(z) &= \ln(z) = \ln(s(w)) \\ &= f(w) \\ &= f \circ s^{-1} \circ s(w) \\ &= (f \circ \hat{g}_1)(z) \text{ wie erwünscht.} \end{aligned}$$

Wir bekommen $g_1: (B_1(0), 0) \longrightarrow (\mathbb{H}, 0)$ und
 $g_2: (B_1(0), 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ durch Skalierung:

$$g_1(z) := \hat{g}_1(z \cdot \sigma) \quad g_2(z) := \sigma^n z. \text{ Dann}$$

$$\text{gilt: } (g_2 \circ \ln)(z) = \sigma^n \ln(z) = \sigma^n z^n$$

$$= (\sigma z)^n = \ln(\sigma z) \text{ mit}$$

$\sigma z \in B_r(0)$

$$= (\hat{g}_2 \circ \ln)(\sigma z)$$

$$= (f \circ \hat{g}_1)(\sigma z)$$

$$= f(\hat{g}_1(\sigma z))$$

$$= f(g_1(z)) = (f \circ g_1)(z)$$