6. komplex trigonometische Funktionen.

Defn. 6.1

• $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$R = \infty$ (genau wie im Fall $\mathbb{R}$). D.h. $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph. $\left((n!)^{\frac{1}{n}} = (n \cdot (n-1) \cdots)^{\frac{1}{n}} \geq \left(\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \to \infty \quad n \to \infty \right.$

$\Rightarrow \limsup \frac{1}{(n!)^{\frac{1}{n}}} \to 0 = \frac{1}{\rho} \Rightarrow \rho = \infty$)

6.2 Es gilt: $\exp' : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$\exp'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \exp(z).$$

(Vorsatz 5.4)

Defn. 6.3

• $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\cos(z) = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$,

• $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\sin(z) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.

6.4: Als Verkettungen von holomorphen Funktionen, sind $\cos, \sin : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph.

• 6.5 Da $R = \infty$ für sin, cos und $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, sehen wir mit Hilfe der Defn. von exp, dass

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$\forall z \in \mathbb{C}$.

von der Defn. von cos, sin sieht man:

<u>Propn 6.6</u> (Euler Gleichung):

$$\boxed{e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad \forall z \in \mathbb{C}}$$

<u>Beweis</u>: $\cos(z) = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

$$= \frac{e^{iz}}{2} + \frac{i\, e^{-iz}}{i \cdot 2}$$

$$= \frac{e^{iz}}{2} + i \left(\frac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i} \right)$$

$$= e^{iz} - i \cdot \sin(z) \quad , \quad \blacksquare$$

6.7 Eigenschaften von exp, cos, sin (ÜA). : Es gilt

i) $e^{a+b} = e^{a} \cdot e^{b}$.

(Hinweis: zeigen Sie, dass $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,
$f(z) := e^{z} \cdot e^{c-z}$ erfüllt $f'(z) = 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$.)

ÜA ii) $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b$

$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$.
$\forall a, b \in \mathbb{C}$.

iii) ÜA: Nachgeholt von Ana I/II: (reelles Problem: NICHTS mit $\mathbb{C}$ zu tun). Definiere $\pi := 2 \inf \{ x \in \mathbb{R}^{+} \mid x > 0, \cos(x) = 0 \}$

Dann gilt:
$\cos, \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind 2π periodisch

und es gilt: $\cos(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{3\pi}{2}) = 0$,
$\cos(2\pi) = \cos(0) = 1$, $\cos(\pi) = -1$.

iv) Es gilt: $e^{\frac{\pi i}{2}} = i$, $e^{\pi i} = -1$, $e^{\frac{3\pi}{2} i} = -i$,
$e^{2\pi i} = 1$.

Der komplex Logarithmus:

Defn 6.8: $\arg: \mathbb{C}\setminus\{0\} \longrightarrow [0,2\pi) \subseteq \mathbb{R}$,

$\arg(w) = \theta$, wobei

$\frac{w}{|w|} = \cos\theta + i\sin\theta \; (*)$, $\theta \in [0,2\pi)$.

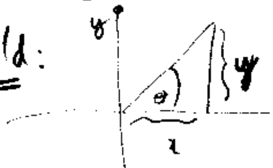
$\exists$ genau ein $\theta \in [0,2\pi)$ die $(*)$ erfüllt,

da $\left|\frac{w}{|w|}\right| = 1$. Es gilt $\arg(w) = \arg(rw) \;\forall r>0$.

Man weist nach, dass

$$\arg(x+iy) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & y < 0 \end{cases}$$

Bild:



$\theta = \arg(x+iy)$

wobei $\arccos: [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$ die Inverse von $\cos: [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$ ist.

$\exp: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\exp(z) = e^z$ // Bekanntlich ist die Inverse von $\exp: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\log: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$: $\log(e^x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{\log(x)} = x \;\; \forall x \in \mathbb{R}^+$.

wir möchten eine Inverse von $\exp: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ berechnen. Sei $w \in \mathbb{C}$. wir suchen $z \in \mathbb{C}$ mit $\exp(z) = e^z = w$. Falls $w = 0$ ist, ist dies nicht möglich, da $\exp(z) \neq 0 \;\forall z \in \mathbb{C}$ $\left(|e^z| = |e^x||e^{iy}| = |e^x| > 0 \;\forall x\right)$

Also: Voraussetzung $w \neq 0$. Man schreibe $z = x+iy$.)

$e^z = w$ (Euler Gl.)

$\Leftrightarrow e^x \cdot e^{iy} = w \Rightarrow e^x = |e^x| \cdot |e^{iy}| \underset{(6.1)}{=} |e^x \cdot e^{iy}| = |w|$

$\Rightarrow x = \log(|w|)$.

Ausgehend $e^z = w \Leftrightarrow e^x \cdot e^{iy} = w \Rightarrow |w| e^{iy} = w$

$\Rightarrow e^{iy} = \frac{w}{|w|}$

$$\Rightarrow \quad \cos(y) + i\sin(y) = \frac{w}{|w|}. \qquad (6.2)$$

Eine Lög ist durch $y = \arg\left(\frac{w}{|w|}\right) = \arg(w)$ gegeben.
Alle Lösungen sind $y = \arg(w) + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ (6.3)

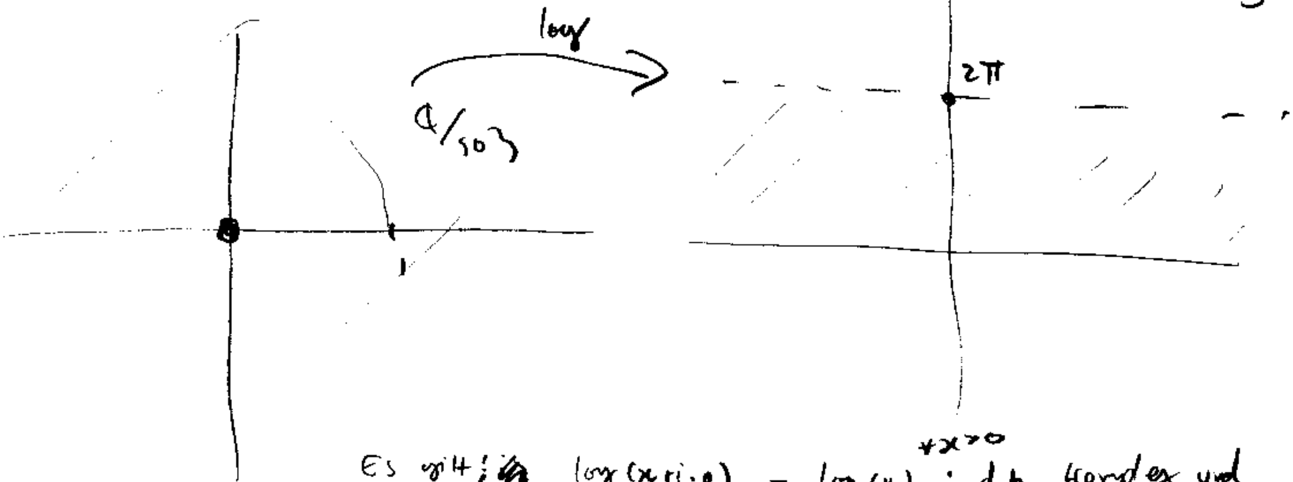
Also: definiere:

Defn 6.9 Für $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist

$$\log(w) \quad (= z = x+iy) := \log(|w|) + i\arg(w).$$

$\log: \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ hat

$$\log(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = D_1 := \{x+iy \mid x \in \mathbb{R},\ y \in [0, 2\pi)\}$$



Es gilt: $\log(x+i\cdot 0) = \log(x)$ $\forall x>0$: d.h. komplex und reellen Logarithmus stimmen überein

Es gilt immer: $\exp(\log(w)) = w$ $\forall w \neq 0$ von der Def.

$$\left(\begin{array}{l} w = |w|(\cos\theta + i\sin\theta) \\ \Rightarrow \arg(w) = \theta \end{array} \quad \theta \in [0, 2\pi) \right\} \Rightarrow e^{\log(w)} = e^{\log|w| + i\arg(w)}$$

$$= |w|(\cos\theta + i\sin\theta).$$

$$= w.$$

Aber $\log(\exp(z))$ ist nicht immer gleich z.

Sei $z = x+iy$ mit $y = 2n\pi + s$, $n \in \mathbb{Z}$, $s \in [0, 2\pi)$.

$$\log(e^z) = \log(e^x \cdot e^{iy})$$

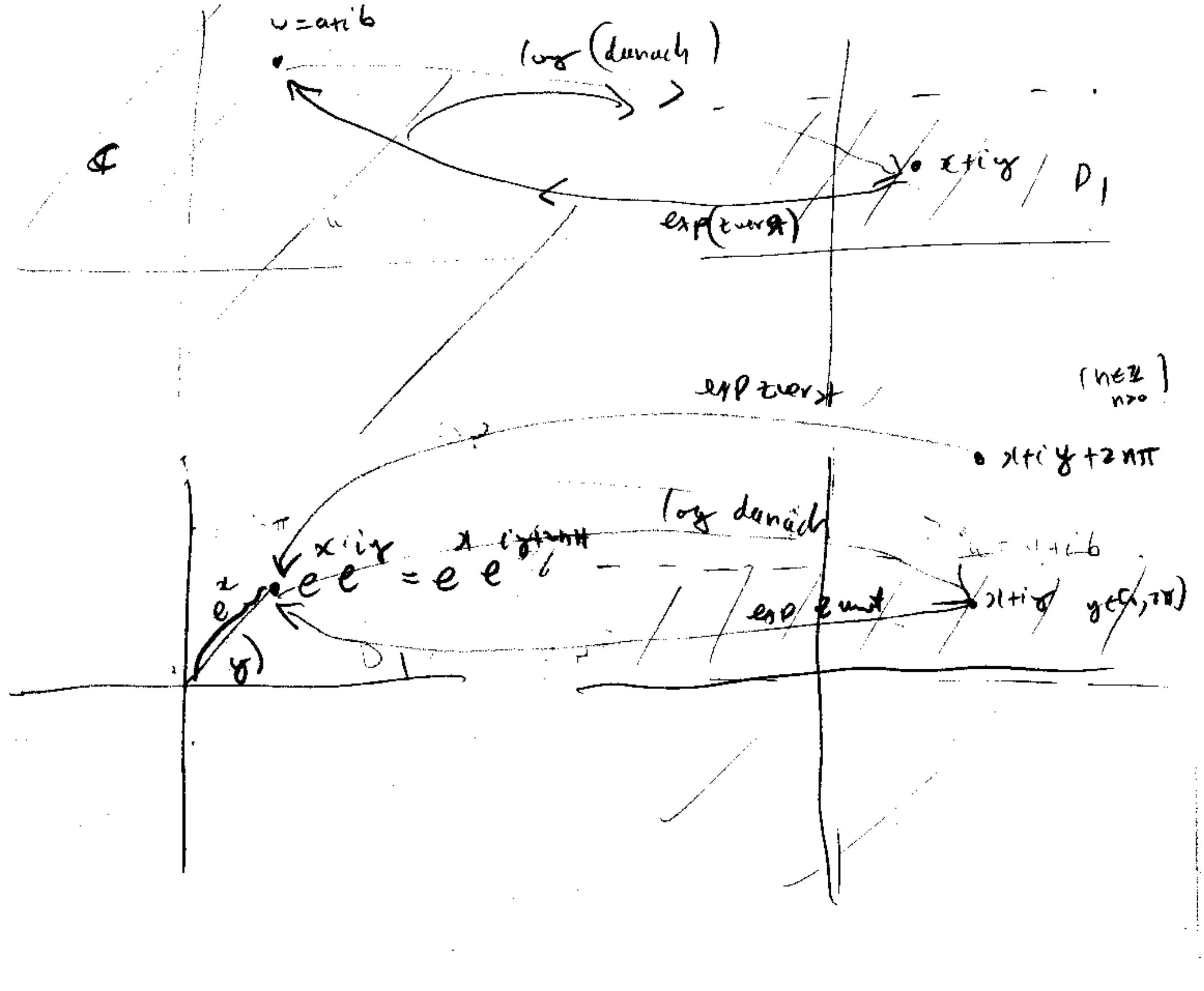
$$= \log(e^x) + i \arg(e^{iy})$$

$$= x + is \neq x + i(2\pi n + s), \text{ es sei denn } n = 0.$$

D.h. $\log(\exp(z)) = z \;\; \forall z \in D_1$,

$\log(\exp(z)) \neq z \;\; \forall z \notin D_1$.

d.h. $\log(\exp(z)) = z \iff z \in D_1$



wir hätten $\log: \mathbb{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ anders definieren können:

sei $D_n := \{x+iy \mid x \in \mathbb{R},\ y \in [(n-1)2\pi, n2\pi)\}$

$n \in \mathbb{Z}$.

Defn 6.10

$$\log_n(w) = \log(|w|) + i(\arg(w) + 2(n-1)\pi)$$

(siehe (6.1) und (6.2))

Dann gilt: $\exp(\log_n(z)) = z \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$

und $\log_n(\exp(z)) = z \iff z \in D_n$.

$$\log_n: \mathbb{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

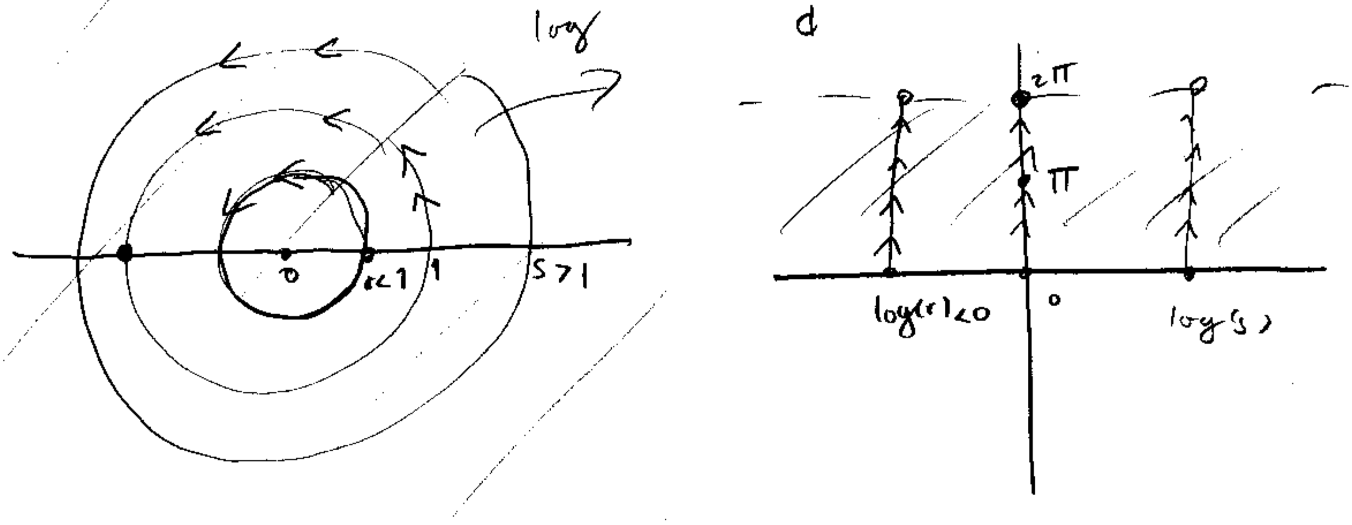
6.11: $\log : \mathbb{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ und $\log_n : \mathbb{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$,
$n \in \mathbb{Z}$ sind jetzt ein für allemal definiert

und $\log = \log_1$.

$$\boxed{\text{Falls } \exp(w) = z,\ z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}, \text{ dann gilt } w = \log_n(z) \text{ für genau ein } n \in \mathbb{Z}}$$

6.11

log: $\mathbb{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist nicht stetig.

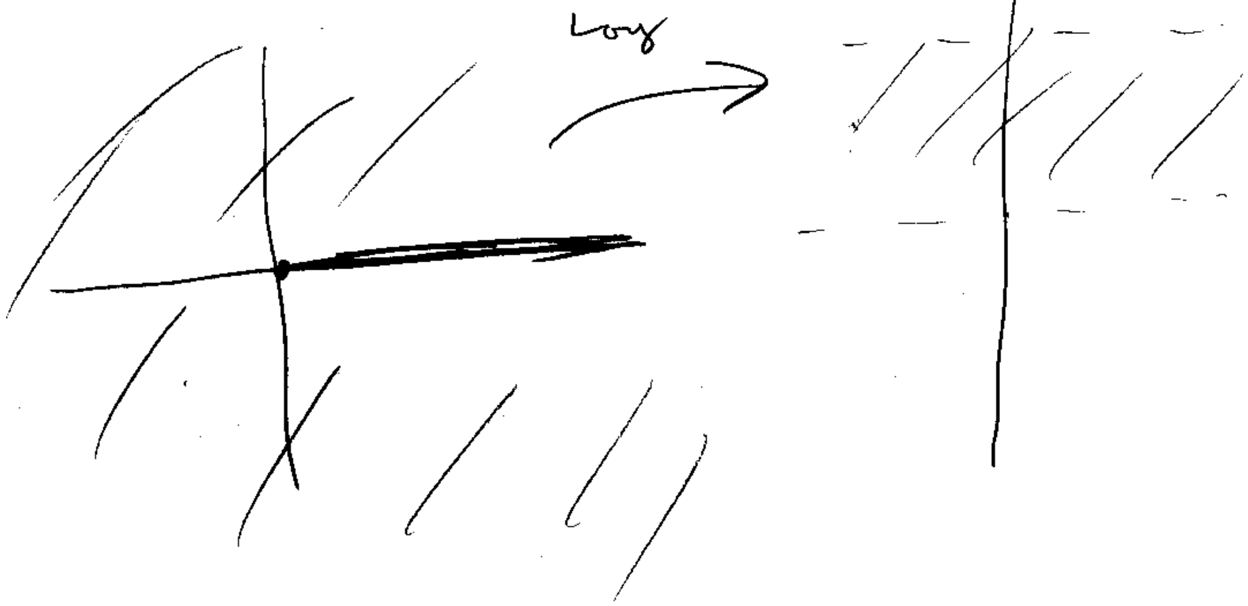


Um dieses Problem zu umgehen, kann man die Definitionsbereich einschränken:

Defn. 6.12: Log: $\mathbb{C}\setminus\{x+iy \mid y=0, x\geq 0\} \longrightarrow \mathbb{C}$

ist $\mathrm{Log}(z) := \log(z)$.

$\mathbb{C}\setminus\{x+iy \mid y=0, x\geq 0\} = \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^+$ heißt die Geschlitzte Ebene.



Jetzt ist $\mathrm{Log}: M \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig.

Propn 6.13

$\mathrm{Log}: M \longrightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph.

Beweis:

$$\log(a+ib) = \log\left(\sqrt{a^2+b^2}\right) + i\arg(a+ib)$$

$$= u(a,b) + i\, v(a,b)$$

mit $u(a,b) := \log\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)$, und

$v(a,b) := \arg(a+ib)$.

$M \subseteq \mathbb{R}^2$ ist $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(a,0) \mid a \geq 0\}$

Man weisst nach dass:

$u, v: M \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sind $\in C^\infty(M,\mathbb{R})$, und

dass $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ und

$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$, d.h. die C. Riemann Gleichungen

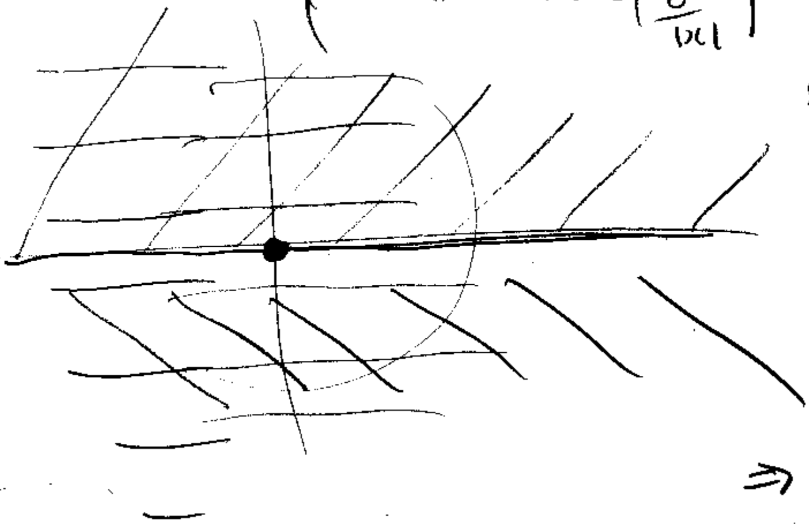
gelten. Von 4.4 (ÜA auf Blatt 2)

ist $f: M \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph,

wobei $f(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y)$
$\forall\, x+iy \in M$ $= \log(x+iy)$.

$x<0$

$$\arg(x+iy) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & y<0 \\ \pi - \arctan\left(\frac{y}{|x|}\right), & x<0 \end{cases}$$



sei $C_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$

$C_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0\}$

$C_3 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$

$\Rightarrow M = \mathring{C}_1 \cup C_2 \cup C_3$

und C_2 und C_3 sind offen.

$\arctan: \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ die Inverse von
$\tan: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$

jeden $(x,y) \in M$ ist $\in \mathring{C}_1$ oder $\mathring{C}_2$ und $\mathring{C}_3$

$V(x,y) = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ ist C^∞ auf $\mathring{C}_1$

$= 2\pi - \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ ist C^∞ auf $\mathring{C}_2 = C_2$

$= \pi - \arctan\left(\frac{y}{|x|}\right)$ ist C^∞ auf $\mathring{C}_3 = C_3$.

$\Rightarrow V$ is C^∞ auf M.

$u(x,y) = \log\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ ist C^∞ auf M

$(x^2+y^2>0$ auf $M)$.

Man prüft nach, dass die Cauchy-Riemann Gleichungen gelten auf C_1^0, C_2^0 und C_3^0.

$\boxtimes$

Letztesmal haben wir gesehen, wie man zeigt:

Propn 6.13:

$\mathrm{Log}: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph,

$$\mathrm{Log}(z) := \log(z) = \log(|z|) + i\arg(z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+_0.$$

Hier ist $\mathbb{R}^+_0 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \subseteq \mathbb{C}$

$$= \{x + i0 \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$$

$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+_0$ heißt die "geschlitzte Ebene".

$\log_n(z) = \log(z) + i2(n-1)\pi$ $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ per Definition:

Damit gilt:

- $\mathrm{Log}_n: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+_0 \longrightarrow \mathbb{C}$, $\mathrm{Log}_n(z) := \log_n(z)$

erfüllt $\mathrm{Log}_n = \mathrm{Log} + i2(n-1)\pi$ (als Funktionen)

$\Rightarrow$ $\mathrm{Log}_n: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+_0 \to \mathbb{C}$ ist auch holomorph.

Propn 6.14 :

$\mathrm{Log}_n : \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ hat komplexe Ableitung

$$(\mathrm{Log}_n)'(z) = \frac{1}{z} \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^+ .$$

Beweis :

$\overset{g}{\overset{\shortparallel}{\mathrm{Log}_n}} : \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph,

$\overset{f}{\overset{\shortparallel}{\exp}} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph.

$\Rightarrow$ (Satz 3.3 (c): Kettenregel für hol. Fn.)

$\overset{f}{\overset{\shortparallel}{\exp}} \circ \overset{g}{\overset{\shortparallel}{\mathrm{Log}_n}} : \mathrm{Log}_n^{-1}(\mathbb{C}) \cap (\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^+) \longrightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph

$= \exp\circ\mathrm{Log}_n : \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph

mit $(f\circ g)'(z) = f'(g(z))\cdot g'(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^+$.

Aber $(f\circ g)(z) = (\exp\circ\mathrm{Log}_n)(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^+$.

$= \exp(\log(z) + i\,2(n-1)\pi) = \exp(\log(z)) = z$

$\Rightarrow (f\circ g)'(z) = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^+$

und $f'(g(z)) = \exp'(g(z)) = \exp(g(z)) = \exp(\mathrm{Log}_n(z)) = z$

$\Rightarrow \quad (g = \mathrm{Log}_n)$

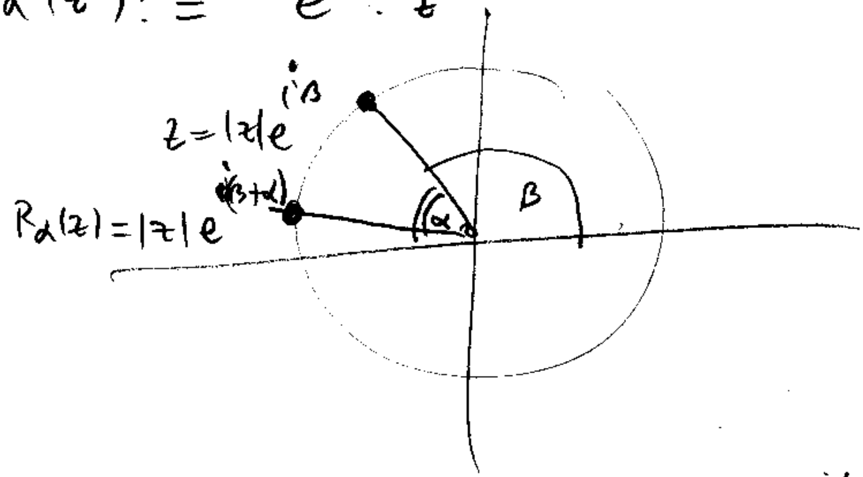
$$1 = z\,\mathrm{Log}_n'(z) \Rightarrow \mathrm{Log}_n'(z) = \frac{1}{z} \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^+$$

6.15 Die Rotations $\mathbb{f}$. :

Für $\alpha \in [0, 2\pi)$ ist $R_\alpha : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

"Rotation durch winkel α",

$$R_\alpha(z) := e^{i\alpha} \cdot z$$



$R_\alpha : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph mit

Inverse $\left(R_\alpha\right)^{-1}(z) = e^{-i\alpha} \cdot z$.

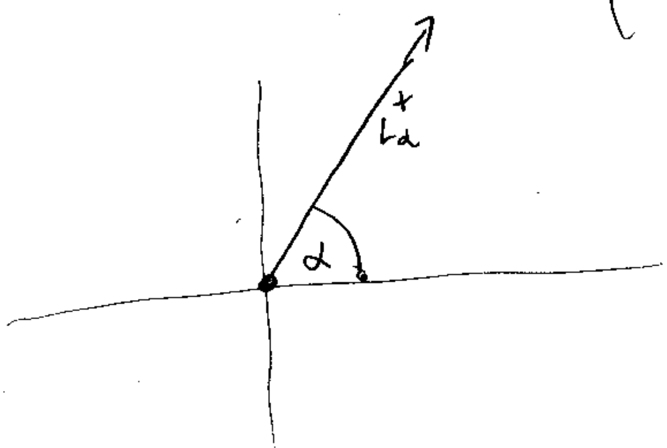
$$R_\alpha'(z) = e^{i\alpha} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

$\hat{\log}: \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ $\qquad n \in \mathbb{Z}$ sind

eins für allemal definiert. Wir können trotzdem andere holomorphe Funktion f (z.B. $\tilde{\log}: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}^{+} \to \mathbb{C}$) definieren ~~mit~~ anderen Definitionsbereichen.

Definition 6.16:

Sei $\alpha \in [0, 2\pi)$. $L_\alpha^+ := \{ z \in \mathbb{C} \mid z = re^{i\alpha}, r \geq 0 \}$.



L_α^+ ist die Halblinie mit Winkel α.

- $0 \in L_\alpha^+$

Definition 6.17 : $\mathrm{Log}_{n,\alpha} : \mathbb{C} \setminus L_\alpha^+ \longrightarrow \mathbb{C}$, $\alpha \in [0, 2\pi)$,

ist $\mathrm{Log}_{n,\alpha}(z) := \mathrm{Log}_n((R_\alpha)^{-1}(z)) + i\alpha$

6.18 : Es gilt: $\exp \circ \mathrm{Log}_{n,\alpha}(z) = e^{i\alpha}(\mathrm{Log}_n((R_\alpha)^{-1}(z)))$

$$= e^{i\alpha} \cdot e^{-i\alpha} \cdot z = z .$$

Propn 6.19 : $\mathrm{Log}_{n,\alpha} : \mathbb{C} \setminus (L_\alpha^+) \longrightarrow \mathbb{C}$ ist

holomorph mit $\mathrm{Log}_{n,\alpha}'(z) = \frac{1}{z} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus (L_\alpha^+)$.

Notation $R_{-\alpha} = (R_\alpha)^{-1}$.

Beweis : $\mathrm{Log}_{n,\alpha} : \mathbb{C} \cap (R_{-\alpha})^{-1}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+) \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\| $$

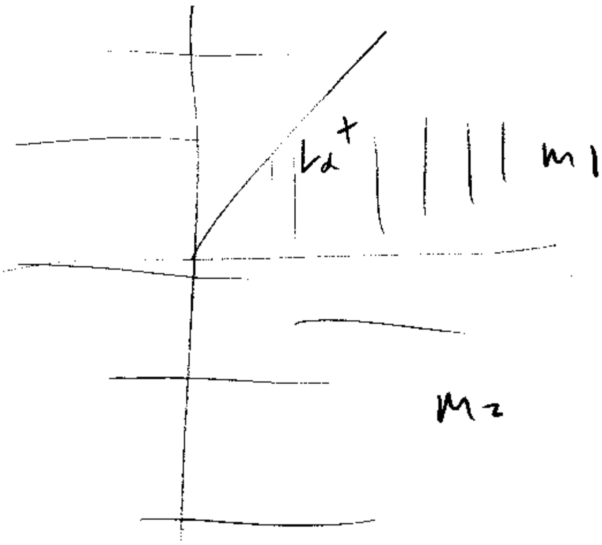
$$(\mathbb{C} \setminus L_\alpha^+) \longrightarrow \mathbb{C},$$

$$\mathrm{Log}_{n,\alpha}'(z) = \mathrm{Log}_n'(R_{-\alpha}(z)) \cdot (R_{-\alpha})'(z) + 0$$

$$= \frac{1}{R_{-\alpha}(z)} (R_{-\alpha})'(z)$$

$$= \frac{e^{-i\alpha}}{z e^{-i\alpha}} = \frac{1}{z} .$$

Propn 6.20 $\mathrm{Log}_{n,\alpha} : \underbrace{\mathbb{C} \setminus L_\alpha^+}_{= M_1 \cup M_2} \longrightarrow \mathbb{C}$



$$M_1 = \{ re^{i\beta} \mid r>0,\ \beta \in [0,\alpha) \}$$

$$M_2 = \{ re^{i\beta} \mid r>0,\ \beta \in (\alpha, 2\pi) \}$$

ist $\mathrm{Log}_{n,\alpha}(z) = \begin{cases} \log_{n+1}(z) & \forall z \in M_1 \\ \log_n(z) & \forall z \in M_2 \end{cases}$

(iA) $\mathrm{Log}_{0,\alpha}$