

wie erwünscht. $\square$

Lemma 11.8 : Sei M offen, $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $p \in M$ und $f'(p) \neq 0$. Dann
 $\exists \varepsilon > 0$ und $B_\varepsilon(p) \subseteq M$, so dass

$f|_{B_\varepsilon(p)} : B_\varepsilon(p) \rightarrow \mathbb{C}$ eine Einbettung ist.

Beweis : $f'(p) \neq 0 \Rightarrow$

$$\{f'(p) \cdot c \mid c \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C}. \quad \text{D.h.}$$

$$f'(p): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f'(p)(a) := f'(p) \cdot a$$

ist ein V. Raum Isomorphismus.

$$\Rightarrow Df(p): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$Df(p)(v) = Df(p) \cdot v \quad \forall v \in \mathbb{R}^2$ ein
 V. Raum Iso ist, da $f = u + iv$, und
 (c.R. bleiben)

$$Df(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ -\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix} \Rightarrow \det Df(p) = \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2$$

$\neq 0$ (sonst wäre $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$)

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{von den C.R.}$$

gleiches Φ

$$\Rightarrow f'(p) = 0 \Rightarrow \text{?}$$

Die partiellen Ableitungen sind auch stetig da f holomorph ist. Ans II $\Rightarrow$

$$f|_{B_\varepsilon(p)} : B_\varepsilon(p) \rightarrow f(B_\varepsilon(p)) \text{ invertierbar ist}$$

für ε klein genug, und dass die Inverse $f^{-1} : V \rightarrow B_\varepsilon(p)$ stetig differenzierbar ist.

$f^{-1} : V \rightarrow B_\varepsilon(p)$ ist auch holomorph: $z \rightarrow p$

$$f(z) - f(p) = (z-p) \cdot (\varepsilon_p(z) + f'(p))$$

$$\text{Setze } z = f^{-1}(w), p = f^{-1}(w_0) \Rightarrow$$

$$w - w_0 = (f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)) (\varepsilon_p(f^{-1}(w)) + f'(f^{-1}(w_0)))$$

$$\Rightarrow \frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)}{w - w_0} = \frac{1}{(\varepsilon_p(f^{-1}(w)) + f'(f^{-1}(w_0)))}$$

$$\xrightarrow{w \rightarrow w_0} \frac{1}{f'(f^{-1}(w_0))}, \text{ da}$$

- 66 -

$f^{-1}: V \rightarrow Q$
 f^{-1} stetig ist $\Rightarrow$

$$f^{-1}(w) \xrightarrow{w \rightarrow w_0} f^{-1}(w_0) \Rightarrow \varepsilon_p(f^{-1}(w)) \xrightarrow{w \rightarrow w_0} 0$$

$= p$

Also $f'(p) \neq 0 \Rightarrow f'(z) \neq 0$

$\forall \varepsilon \in B_\delta(p)$ und durch f^{-1} ist
 (f^{-1}) holomorph.



— 67 —

Korollar 16.10 (Gebietskreuz). Sei $M \subseteq \mathbb{C}$ offen und zngd., $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, und f nicht eine konstante f.d.h. $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ $f(z) = c \forall z \in M$ gilt nicht. Dann ist

$f(M)$ offen und zngd.

Beweis: Sei $x \in M$ beliebig, und $B_r(x) \subseteq M$ rektang. $h: B_r(x) \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$h(z) = f(z) - f(x). \text{ Dann ist } h(x) = 0.$$

Falls $h|_{B_r(x)} \equiv 0$ identisch null
wäre, dann gilt $h = 0$ auf ganz M

(Identitätssatz) $\Rightarrow f(z) = f(x) \forall z \in M$

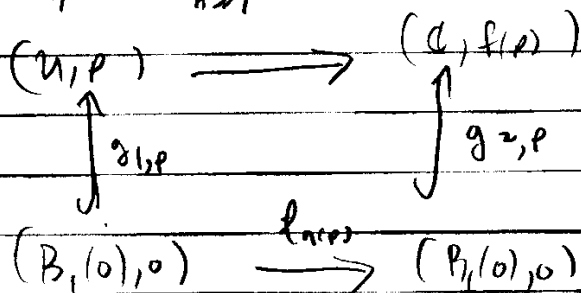
$\Rightarrow \exists$. Also $h|_{B_r(x)} \not\equiv 0$ ist

nicht identisch null. $\Rightarrow$

$$\inf \{j \geq 1 \mid h^{(j)}(x) \neq 0\} \neq \infty.$$

$$= \inf \{j \geq 1 \mid f^{(j)}(x) \neq 0\} \neq \infty$$

$$n = n''(x) \in \mathbb{N}_{n \geq 1}.$$



$$\Rightarrow f(u) = \bigcup_{p \in u} f(g_{1,p}(B_1(o)))$$

$$= \bigcup_{p \in u} g_{2,p}(l_{n(p)}(B_1(o)))$$

also $l_{n(p)}(B_1(o)) = B_1(o) \quad \forall n(p) \in \mathbb{N}$
(nicht für $n(p) = \infty$!)

$$= \bigcup_{p \in u} \underbrace{g_{2,p}(B_1(o))}_{\text{offen}}$$

da $g_{2,p}: B_1(o) \hookrightarrow \mathbb{R}$ eine Einbettung
ist.
= offen.

zuletzt. folgt davon, dass

(zuletzt) f stetig $\Rightarrow f(u)$ zhd

für
($f(p), f(q) \in f(u)$, sei $\gamma: [0,1] \rightarrow u$
kein Weg von p nach q , dann ist
 $f \circ \gamma: [0,1] \rightarrow f(u)$ ein Weg von
 $f(p)$ nach $f(q)$ $\square$)

* Ende meines Vorlesers.

Von Lemma: Am Ende werde gezeigt, dass
 $f(u)$ wegzhd ist (im Schritt 2). Also von Start? war $f(u)$
offen $\Rightarrow f(u)$ zhd.

Korollar 11.11 (starkes Maximumsprinzip für holomorphe Funktionen)

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, z hngl. und sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, aber f nicht konstant.

Sei $m := \sup_{z \in U} |f(z)|$. Dann gibt

es kein $z \in U$ mit $|f(z)| = m$.

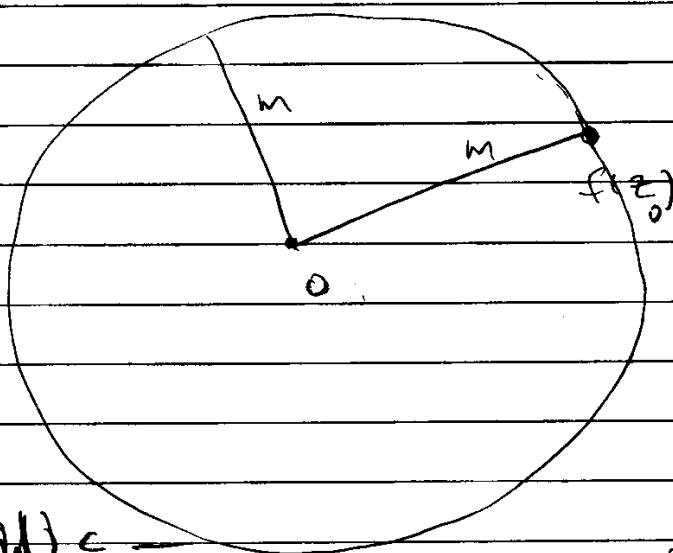
Bild:

Der Satz impliziert: f nicht konstant dann

$$m = \lim_{k \rightarrow \infty} |f(z_k)| \quad \text{mit } \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{für eine Folge } z_k \in U$$

mit $z_k \rightarrow \partial U$ d.h. $(z_k, m) \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$.

Beweis: Angenommen $\exists z_0 \in U$ mit $|f(z_0)| = m$



$f(z_0) \in \overline{f(U)} \subseteq \overline{B_m(0)}$ und $f(z_0) \in \partial B_m(0)$.

$\Rightarrow f(M)$ ist nicht offen:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon(f(z_0)) \cap (\overline{B_{M(0)}})^c \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow B_\varepsilon(f(z_0)) \cap (f(M))^c \neq \emptyset$$

$\Rightarrow B_\varepsilon(f(z_0))$ ist nicht ganz enthalten
in $f(M)$

$\Rightarrow f(M)$ ist nicht offen.

$\Rightarrow \exists.$

□

-71-

Satz 11.12 (Schwarz'sches Lemma).

Sei $f: B_1(0) \rightarrow B_1(0) \subseteq \mathbb{C}$ holomorph

(d.h. $f(B_1(0)) \subseteq B_1(0)$) mit $f(0) = 0$.

Dann gilt:

i) $|f(z)| \leq |z|$ und

ii) $|f'(0)| \leq 1$

b) Falls $|f(z)| = |z|$ ^{für ein} ~~best~~ $z \in B_1(0), z \neq 0$

oder $|f'(0)| = 1$, dann gilt:

f ist eine Drehung (Rotation):

$$f(z) = e^{i\alpha} z \quad \text{für ein } \alpha \in [0, 2\pi).$$

Beweis:

-72-

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$, so dass $\forall z \mid z \mid \geq \delta$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq 1 + \varepsilon$$

(wähle $\delta = \frac{1}{1+\varepsilon} \Rightarrow \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq \frac{1}{(1/\varepsilon)} = 1 + \varepsilon$)

Die Taylorreihe Entwicklung von f ist:

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} z^j$$

Definieren $g: B_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$,

$$g(z) = \begin{cases} f(z)/z, & z \neq 0 \\ f'(0), & z = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} f(z)/z & z \in B_1(0) \setminus \{0\} \\ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j+1)}(0)}{(j+1)!} z^{j+1} & z \in B_1(0) \end{cases}$$

Stimmen überein

Prüfung: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ konv. Radius $\neq 1$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} z^k$ mit " " ≥ 1

$$\left(\limsup_{k \rightarrow \infty} (a_{k+1})^{\frac{1}{k}} = \limsup_{k \rightarrow \infty} |a_{k+1}|^{\frac{1}{k+1}} \left(\frac{k+1}{k} \right)^{\frac{1}{k}} \right)$$

$$= \limsup_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}$$

$\Rightarrow$ konv. Radius von $\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} z^k \geq 1$

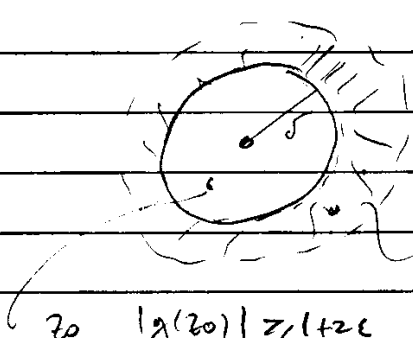
$\Rightarrow$ alles wohldefiniert.

Nehmen wir jetzt an, dass ρ nicht konstant ist:

g holomorph $\Rightarrow |g(z)| \leq (1+\varepsilon) \quad \forall z \in B_1(0) \setminus B_\delta(0)$

$\delta = \delta(\varepsilon) \quad B_1(0) \setminus B_\delta(0) \quad (\delta \in (0,1))$

$= \{z \in B_1(0) \mid |z| \geq \delta\}$



$|g(z)| \leq 1+\varepsilon$

$z_0 \quad |g(z_0)| \geq 1+2\varepsilon$

Annehmen: $\exists z_0 \in B_1(0)$ mit $|g(z_0)| \geq 1+2\varepsilon$, dann muss $\Rightarrow$ gelten

$\sup_{z \in B_1(0)} |g(z)| = \sup_{z \in \overline{B_\delta(0)}} |g(z)|$

Kompaktheit

$\Rightarrow \sup_{z \in B_1(0)} |g(z)| = |g(z_0)|$ für ein $z_0 \in \overline{B_\delta(0)}$

$\Rightarrow z_0$ von Kor. 11.14

d.h. $|g(z_0)| \leq 1+2\varepsilon \quad \forall z_0 \in B_1(0)$

ε beliebig $\Rightarrow$

$|g(z)| \leq 1 \quad \forall z \in B_1(0)$

$$\Rightarrow |f(z)| < |z| \quad \forall z \in B_1(0) \setminus \{0\}$$

und so

$$|f(z)| \leq |z| \quad \forall z \in B_1(0) \\ (\text{an } f(0) = 0)$$

Weiterhin gilt:

$$|g(0)| = |f'(0)| \leq 1 \quad \text{wie erwünscht. Fehle Beweis von a) -}$$

Angem.

Falls $|g(z)| = |z|$ für ein $z_0 \in B_1(0) \setminus \{0\}$ dann ist

$$1 \geq \sup_{z \in B_1(0)} |g(z)| = |g(z_0)| = 1$$

$$\Rightarrow g \text{ (von Kor. vorher)}$$

d.h. g ist eine Konstante

$$\Rightarrow g'(z) = 0$$

$$\Rightarrow g(z) = c_0 = g(z_0) \text{ von oben } \Rightarrow |c_0| = 1$$

$$\Rightarrow |g(z)| = |c_0| = 1 \quad \forall z \in B_1(0) \text{ wie erwünscht.}$$

Falls $|f'(0)| = 1 \Rightarrow$

$$1 \geq \sup_{z \in B_1(0)} |g(z)| = |g(0)| = |f'(0)| = 1 \Rightarrow \{$$

76

$\Rightarrow$ g konstante

$$\Rightarrow \begin{aligned} g(z) = c_0 &\Rightarrow f(z) = c_0 \cdot z \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ |g'(0)| = 1 &\Rightarrow |c_0| = 1. \end{aligned}$$

$\square$

mit der Information die wir über holomorphe Funktionen in ~~11~~ den letzten Kapiteln gewonnen haben, können wir jetzt folgendes untersuchen:

12. Beziehung zwischen harmonischen und holomorphen Funktionen:

12.1 Defn. $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen heißt harmonisch, falls $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ ist und

$$\Delta f \equiv 0 \text{ auf } U \text{ ist. Hier ist } \Delta f: U \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) \quad \text{für } x \in U.$$

2 Beispiele: i) offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ $f(x) := \sum_{k=1}^n a_k x^k + b.$

ii) $f: B_1^2(0) \setminus \overline{B_r^2(0)} \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $r < 1$

$$B_S^n(p) := \{z \in \mathbb{R}^n \mid |z-p|_{\mathbb{R}^n} < S\},$$

$$f(z) = \log |z| = \log \sqrt{|z|^2} = \log \sqrt{|z|^2 + |z|^2},$$

$$\text{ic. } f(x,y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Delta \log | \cdot | = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\log | \cdot |) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\log | \cdot |)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

$$= \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 2y^2 - 2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

Bonus log: $f(x^1, \dots, x^n) = \log((x^1)^2 + \dots + (x^n)^2)$

(78)

ist nicht harmonisch auf $B_1^n(0) \setminus \overline{B_r^n}(0)$

für $n \geq 2$.

iii) $f: B_1^n(0) \setminus \overline{B_r^n}(0) \rightarrow \mathbb{R}$, f

$$f(x^1, \dots, x_n) = \|x^1, \dots, x_n\|^p \quad (p = -n+2)$$

$$= ((x^1)^2 + \dots + (x^n)^2)^{\frac{p}{2}} \quad \text{ist harmonisch.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(\vec{x}) = \frac{p}{2} ((x^1)^2 + \dots + (x^n)^2)^{\frac{p}{2}-1} \cdot x^i$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^i}(\vec{x}) = p \cdot \left(\frac{p}{2}-1\right) \cdot ((x^1)^2 + \dots + (x^n)^2)^{\frac{p}{2}-2} \cdot 2(x^i)^2$$

$$+ p \cdot ((x^1)^2 + \dots + (x^n)^2)^{\frac{p}{2}-1} \cdot 1$$

$$\Rightarrow \Delta f(\vec{x}) = \left(\sum_{i=1}^n \left(2 p \cdot \left(\frac{p}{2}-1\right) (x^i)^2 + p \cdot ((x^1)^2 + \dots + (x^n)^2) \right) \right) \cdot \|\vec{x}\|^{2(\frac{p}{2}-2)}$$

$$= \|\vec{x}\|^{p-4} \cdot (2 p (\frac{p}{2}-1) \|\vec{x}\|^2 + n \cdot p \|\vec{x}\|^2)$$

$$= \|\vec{x}\|^{p-2} \cdot (2(\frac{p}{2}-1) + n) = 0$$

falls $\frac{p}{2} = -\frac{n}{2} + 1 \Rightarrow p = -n+2$.

Bemerkung: $f(x', x'') = |x', x''|^{-2+2} = 1$

79

ist auch harmonisch.

Bemerkung: $f(x) = |x|^{2-n}$ ist nicht im Null definiert für $n \geq 2$.

Satz 2 p. 3 Sei $f: U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph,
 nicht konstant,

$$f(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y).$$

Dann sind $u, v: U \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch.

Beweis: Am Anfang der Vorlesung haben wir dies gezeigt, unter der Annahme $u, v \in C^2(U, \mathbb{R})$; aber dies sind sie:

f holomorph $\Rightarrow f$ unendlich oft

komplex differenzierbar $\Rightarrow u, v \in C^\infty(U, \mathbb{R})$.

C.R. Gleichungen $\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = + \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x}$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

$$\Rightarrow \Delta u = 0.$$

Frage

nur interessieren uns für die Frage:

für $u: U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch, existiert es eine harmonische Funktion $v: U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$

mit $f(x+iy) := u(x,y) + i v(x,y)$ holomorph?

ist (wenn U einfach zhngh.) und dass v bis auf eine konstante eindeutig bestimmt ist.

Satz 12.4 : Sei u offen, U einfach zhngh.,

$u: U \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch. Dann $\exists v: U \rightarrow \mathbb{R}$

harmonisch, so dass $f \equiv u + iv$ holomorph ist.

$v: U \rightarrow \mathbb{R}$ ist bis auf eine konstante eindeutig bestimmt.

Beweis: Definiere $f = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$

f erfüllt: $\frac{\partial f^{\text{Re}}}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} = - \frac{\partial f^{\text{Im}}}{\partial x}$, und

$$\frac{\partial f^{\text{Im}}}{\partial y} = \frac{\partial f^{\text{Re}}}{\partial x} \quad f: U \rightarrow \mathbb{C}$$

ist $\mathbb{C}^2$ und erfüllt C.R. Gleichungen.

Auf. 3, Blatt 2 $\Rightarrow f$ holomorph. U

einfach zhngh $\Rightarrow \exists$ Stamm fn.

$F: U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $F' = f$

Sei $F(x+iy) = l(x,y) + i h(x,y)$.

(81)

$$F'(x+iy) = \frac{\partial l}{\partial x}(x,y) + i \frac{\partial h}{\partial x}(x,y)$$

$$= F'(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial l}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\text{Also } F'(x+iy) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+iy+h) - F(x+iy)}{ih}$$

$$= \frac{\partial l}{\partial y} + i \frac{\partial h}{\partial y}$$

$$= F'(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial l}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow$$

$$Dl(x,y) = \left(\frac{\partial l}{\partial x}(x,y), \frac{\partial l}{\partial y}(x,y) \right)$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y), \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \right)$$

$$= Du(x,y) \Rightarrow D(l-u)(x,y) = 0 \Rightarrow l \equiv u + c \text{ auf } M.$$

(82)

$$\Rightarrow F(x+iy) = \overset{(x,y)}{u(x,y)} + i h(x,y) \\ = u(x,y) + v_0 + i h(x,y)$$

$\tilde{F} := F - v_0$ ist auch eine Stamm fun. für

$$f, \tilde{F} := F - v_0 := u(x,y) + i h(x,y).$$

Dann sehen wir: $\exists$ holomorphe $\tilde{F}: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\text{mit } \operatorname{Re}(\tilde{F}) = u.$$

weiterhin gilt: Falls $G: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

holomorph ist mit $G(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y)$,

$$\text{dann gilt: } G'(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \\ \text{(C.R.)} \\ = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$$

$$= f(x+iy)$$

(f wie vorher definiert). i.e. G ist eine Stamm fun. von f. $\tilde{F}$ oben ist auch eine Stamm fun. von f

$$\text{u} \quad \text{Zusatz: } \Rightarrow \tilde{F} \equiv G + a_0 \text{ für ein } a_0 \in \mathbb{C} \\ \Rightarrow \operatorname{Im}(\tilde{F}) = \operatorname{Im}(G + a_0)$$

$$\Rightarrow h(x,y) = v(x,y) + \operatorname{Im}(a_0).$$

Ist harmonisch folgt wieder von der C.R.

Gleichung:

□