

Korollar 12.5 Sei $u: U \xrightarrow{c} \mathbb{R}$ harmonisch. (83)

Per Def. $u \in C^2(U, \mathbb{R})$. Dann ist

$$u \in C^\infty(U, \mathbb{R}).$$

Beweis:

Lemma 12.4 $\exists f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit

$$f(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y). \quad f \text{ holomorph}$$

$\Rightarrow f$ ist unendlich oft und komplex differenzierbar

$\Rightarrow u, v \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ sind. $\square$
(mittlere Eigenschaft von harmonischen Funktionen).

Satz 12.6: Sei $u: D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch.

$\overline{B_r(p)} \subseteq D$, Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(p + re^{it}) dt = u(p)$$

Beweis: Sei $\overline{B_r(p)} \subseteq D$ und $\overline{B_r(p)} \subseteq B_{2r}(p) \subseteq D$: so ein $\gamma(p)$ existiert da lokal ist sei $V: B_{2r}(p) \rightarrow \mathbb{R}$ eine h. f.

mit $F = u + i v: B_{2r}(p) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph.

• eine holomorphe Fk. F existiert wegen Satz 12.4.

(Cauchy-Integrierformel sagt für $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \overline{B_r(p)}$
 $\gamma(t) = p + re^{it}$

$$\begin{aligned} u(p) + i v(p) &= F(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F(z) dz}{(z-p)} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{F(p + re^{it}) \cdot r i e^{it}}{r e^{it}} dt \\ &= \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(p + re^{it}) dt$$

84

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(p + re^{it}) dt + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(p + re^{it}) dt$$

D.h. $u(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(p + re^{it}) dt$, wie

er wünscht. $\square$

Starkes Maximum Prinzip für harmonische Funktionen.

Satz 12.7: Sei $u: U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch,
 U zindig.

Angenommen: $\exists p \in U$ mit

$$u(p) = \sup_{z \in U} u(z), \text{ beziehungsweise}$$

$$u(p) = \inf_{z \in U} u(z), \text{ dann gilt}$$

$$u \equiv \text{konst.}$$

Beweis: Sei $D = \{q \in U \mid u(q) = \sup_{z \in U} u(z)\}$

und

Sei $\{z_k\} \in D$ mit $z_k \rightarrow z \in U$
 (d.h. $z \in \overline{D} \cap U$).

Dann gilt $u(z) = \sup_{z \in U} u(z)$, d.h. u ist in U konst.

D.h. $\overline{D} \cap U = D$.

Wir behaupten auch, dass p off. ist.

(85)

Dies sieht man so: Sei $\overline{B_\varepsilon(p)} \subseteq M$.

Falls $u|_{B_\varepsilon(p)} \neq \text{kont. ist}$, d.h. $\exists$

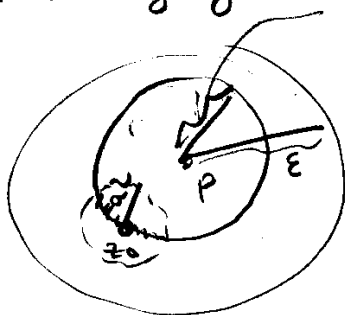
$z_0 \in B_\varepsilon(p)$ mit $u(z_0) \neq u(p) = \sup_{z \in M} u(z)$.

D.h. $u(z_0) < \sup_{z \in M} u(z) = u(p)$.

sei $u(z_0) \leq u(p) - \sigma$ für ein $\sigma > 0$.

$\Rightarrow u(z) \leq u(p) - \frac{\sigma}{2}$ für alle $z \in B_{\tilde{\sigma}}(z_0)$

für $\tilde{\sigma} > 0$ rein genug $r = |z_0 - p|$



ist

$\Rightarrow u(z) \leq u(p) - \frac{\sigma}{2} \quad \forall z = p + re^{it}, \quad t \in (\alpha - \tilde{\sigma}, \alpha + \tilde{\sigma})$

wobei $z_0 = p + r e^{i\alpha}$ ist $\alpha \in [0, 2\pi)$.

$r = |z_0 - p|$

$$\Rightarrow u(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(p + r e^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\alpha - \tilde{\sigma}} u(p + r e^{it}) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha - \tilde{\sigma}}^{\alpha + \tilde{\sigma}} u(p + r e^{it}) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha + \tilde{\sigma}}^{2\pi} u(p + r e^{it}) dt$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha-2\pi}^{2\pi} u(\rho + re^{it}) dt$$

(86)

$$\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \alpha^{-\alpha} \cdot \left(\sup_{\mathcal{U}}(u) = u(\rho) \right)$$

$$+ \frac{1}{2\pi} 2\alpha^{\alpha} \cdot \left(u(\rho) - \frac{\sigma}{2} \right)$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2\pi - \alpha}{\alpha} \right) \left(\sup_{\mathcal{U}}(u) \right)$$

$$= \sup_{\mathcal{U}}(u) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha^{\alpha}}{\pi}$$

$$< \sup_{\mathcal{U}}(u) = u(\rho)$$

$$\Rightarrow \zeta.$$

(87)

$$u|_{B_\varepsilon(p)} \equiv \text{kont.} = u(p) = \sup_{z \in U} u(z)$$

$$\Rightarrow \text{Dist of } k: \quad \forall p \in D \quad \exists B_\varepsilon(p), \\ \text{so dass} \quad z \in D \quad \forall z \in B_\varepsilon(p).$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} U &= D \cup (D^c \cap U) \\ &= D \cup ((\bar{D} \cap U)^c \cap U) \\ &= D \cup ((\bar{D})^c \cup U^c) \cap U \\ &= D \cup (\underbrace{\bar{D}}_{\text{offen}} \cap \underbrace{U}_{\text{offen}}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (D=U \text{ und } x=\phi) \underline{\underline{=}} (D=\phi \text{ und } x=U).$$

Aber: $D \neq \phi$ wegen der Annahme.

$$\Rightarrow D=U \Rightarrow u(y) = \sup_{z \in U} u(z) \quad \forall y \in U.$$

AN

(88)

Korollar 12.8 (schwaches Maximumprinzip für harmonische f.)

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, zdingt, $\bar{U}$ kompakt ($\bar{U}$ = Abschluss von U). Sei: $u: \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $u|_U: U \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch.

Dann gilt:

$$\sup_{z \in U} u(z) = \sup_{z \in \partial U} u(z) \quad \text{und}$$

$$\inf_{z \in U} u(z) = \inf_{z \in \partial U} u(z)$$

Beweis: $\sup_{z \in \bar{U}} u(z) = \sup_{z \in U} u(z) = \sup_{z \in \bar{U}} u(z) < \infty$ folgt vom stetig
wert von u
und der Tatsache, dass
 $\bar{U}$ kompakt ist.

$$\text{und } \sup_{z \in U} u(z) = \sup_{z \in \bar{U}} u(z) \geq \sup_{z \in \partial U} u(z).$$

$$\text{Wir zeigen } \sup_{z \in U} u(z) \leq \sup_{z \in \partial U} u(z). \quad \text{Angenommen}$$

$$\exists z_0 \in U, \varepsilon_0 > 0 \text{ mit } u(z_0) \geq \sup_{z \in \partial U} u(z) + \varepsilon_0. \quad (*)$$

$$\text{Sei mit } \lim_{i \rightarrow \infty} u(z_i) = \sup_{z \in U} u(z).$$

Dann gilt $w_i \in \bar{U}$, und dies impliziert, dass
 eine Teilfolge $(w_{i_j})_{j \in \mathbb{N}}$ von $(w_i)_{i \in \mathbb{N}}$ konvergiert
 zu $w \in \bar{U}$. Behauptung:

$w \notin \partial U$. Da sonst gilt

$$u(w) \leq \sup_{z \in U} u(z) = \lim_{i \rightarrow \infty} u(w_i) = \lim_{j \rightarrow \infty} u(w_{i_j}) = u(w) \leq \sup_{z \in \partial U} u(z)$$

Bla Widerspruch zu (*). Das heißt

$w \notin \partial U$. d.h. $w \in U$ mit

$$\sup_{z \in U} u(z) = \lim_{j \rightarrow \infty} u(w_{i_j}) = u(w) \text{ mit } w \in U.$$

harmonisch $\Rightarrow u \equiv \text{konst}$ von
 Stokes max. Prinzip für harmon. Fktn.
 $\Rightarrow u(z) = \sup_{\xi \in U} u(\xi) \quad \forall z \in U.$

$$\Rightarrow \sup_{\xi \in U} u(\xi) = u(z) \quad \forall z \in \bar{U} \\ = \sup_{\xi \in U} u(\xi)$$

da u stetig ist.

D.h. Falls $(*)$ stimmt für ein $\varepsilon > 0$, dann gilt 40

$$\sup_{z \in U} u(z) = \sup_{z \in \partial U} u(z).$$

Falls $\forall \varepsilon > 0$ $(*)$ stimmt nicht,
dann gilt

$$u(z_0) \leq \sup_{\xi \in \partial U} u(\xi) \quad \forall z_0 \in U$$

$$\Rightarrow \sup_{z \in U} u(z) \leq \sup_{\xi \in \partial U} u(\xi).$$

Aber $\sup_{z \in U} u(z) \geq \sup_{\xi \in \partial U} u(\xi)$ ~~wie~~ wie

wir Anfang gezeigt haben

$$\Rightarrow \sup_{z \in U} u(z) = \sup_{\xi \in \partial U} u(\xi).$$

D.h. In jedem Fall stimmt die Aussage.

Korollar 12.9 : Sei $v, u: \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ (91)

stetig, U offen, zugehörig, $\bar{U}$ kompakt, und
 $u, v: U \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch. Falls

$$u|_{\partial U} \equiv v|_{\partial U} \quad , \text{ dann gilt}$$

$$u \equiv v .$$

Beweis : Sei $l = u - v$. l ist harmonisch auf U ,
 $l: \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und
 $l \equiv 0$ auf ∂U . von Kor. 12.8 gilt

$$\sup_U l \leq \sup_{\partial U} l = 0 , \text{ und}$$

$$\inf_U l = \inf_{\partial U} l = 0 .$$

$$\text{D.h. } l \equiv 0 . \Rightarrow u \equiv v . \quad \square$$

Man erklärt dieses korollar manchmal anders:

(92)

Kor 12.10: (v.z. von 12.9). Sei U offen, $\mathbb{R}^n$,
mit $\bar{U}$ kompakt.

Sei $f: \partial U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann
existiert maximal eine Lösung

$$u \in C^2(U, \mathbb{R}) \cap C^0(\bar{U}, \mathbb{R}) \text{ zum}$$

Dirichlet Problem:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\partial U} = f \end{cases}$$

Dass es immer eine Lösung gibt, ^{für u glatt genug,} wird

in der Theorie ~~von~~ Partielle Differential Gleichungen
bewiesen (siehe Buch: Gilbarg-Trudinger

"Elliptic Partial Differential Equations of
Second Order" Springer.

Man kann $u: \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ als

"harmonische Fortsetzung der Funktion
 $f: \partial U \rightarrow \mathbb{R}$ " betrachten.

- (3) -

Defn. 12.11 : Sei $w, z \in \mathbb{D}$, $w \neq z$.

Dann ist

$$P(w, z) = \operatorname{Re} \left(\frac{w+z}{w-z} \right) \text{ der Poisson Kern.}$$

Lemma 12.12 : Für $z \neq w \in \mathbb{D}$ gilt

$$P(w, z) = \frac{|w|^2 - |z|^2}{|w-z|^2}$$

Beweis : $\operatorname{Re} \left(\frac{w+z}{w-z} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{(w+z) \cdot \overline{w-z}}{(w-z) \cdot \overline{w-z}} \right)$

$$= \operatorname{Re} \left(\frac{|w|^2 + z \cdot \bar{w} - w \cdot \bar{z} - |z|^2}{|w-z|^2} \right)$$

$$= \frac{|w|^2 - |z|^2}{|w-z|^2} \quad \text{da}$$

$$\operatorname{Re} (z \cdot \bar{w} - w \cdot \bar{z}) = \operatorname{Re} (z \cdot \bar{w} - \overline{z \cdot \bar{w}}) = 0.$$

Lemma 12.12 Sei $w, z \in \mathbb{C}, w \neq z$. Dann ist

(94)

$$P(w, z) := \operatorname{Re} \left(\frac{w+z}{w-z} \right) = \frac{|w|^2 - |z|^2}{|w-z|^2}$$

Lemma 12.13: Sei $P(w, \cdot): \mathbb{C} \setminus \{w\} \rightarrow \mathbb{R}$
und $P(\cdot, z): \mathbb{C} \setminus \{z\} \rightarrow \mathbb{R}$
wie oben definiert. Dann sind

$$\left. \begin{array}{l} P(w, \cdot): \mathbb{C} \setminus \{w\} \rightarrow \mathbb{R} \\ P(\cdot, z): \mathbb{C} \setminus \{z\} \rightarrow \mathbb{R} \end{array} \right\} \text{harmonisch.}$$

Beweis: Sei $f: \mathbb{C} \setminus \{w\} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f(z) := \frac{w+z}{w-z}. \quad f \text{ ist holomorph da}$$

$$f(z) = f_1(z) \cdot f_2(z) \quad \text{wobei}$$

$$f_1, f_2: \mathbb{C} \setminus \{w\} \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorph sind,}$$

$$f_1(z) := w+z, \quad f_2(z) := w-z.$$

Von Satz 12.3 gilt $\operatorname{Re}(f)$ und $\operatorname{Im}(f)$
harmonisch sind. Aber $\operatorname{Re}(f)(z) = \operatorname{Re} \left(\frac{w+z}{w-z} \right).$

Das gleiche Argument kann man mit

$$g: \mathbb{C} \setminus \{z\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad g(w) = \frac{w+z}{w-z} \text{ machen.}$$

□

Satz 12.14 : (Poisson Integral Formel für holomorphe Funktionen). (95)

Sei $f: B_{r+\varepsilon}(0) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ($\varepsilon > 0, r > 0$).

Dann gilt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) P(re^{it}, z) dt$$

$\forall z \in B_r(0)$.

Beweis: Sei $g: B_{r+\varepsilon}(0) \rightarrow \mathbb{C}$ eine beliebige holomorphe Funktion. Cauchy Integral Formel (9.2) liefert

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{g(w)}{w-z} dw \quad \forall z \in B_r(0)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{g(re^{it}) \cdot re^{it}}{(re^{it} - z)} dt$$

hier haben wir $\gamma \in [0, 1] \rightarrow \partial B_r(0), \gamma(t) = re^{it}$
benötigt, und $\gamma'(t) = ire^{it}$.

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(re^{it}) \cdot r^2}{(r^2 - zre^{-it})} dt \quad (*)$$

Sei nun $z \in B_r(0)$, ($|z| = r - \sigma < r$) fest, und 96

$$g: B_{r+\min(\sigma, \varepsilon)}(0) \longrightarrow \mathbb{C},$$

$$g(w) := \frac{f(w)}{r^2 - w \cdot \bar{z}}$$

Dies ist wohldefiniert und holomorph:

$$\forall w \in B_{r+\sigma}(0), \quad z \in \overline{B_{r-\sigma}(0)}$$

$$\begin{aligned} r^2 - w \cdot \bar{z} = 0 &\Rightarrow r^2 = |w| \cdot |z| \\ &= |w| \cdot (r - \sigma) \\ &\leq (r + \sigma)(r - \sigma) \\ &= r^2 - \sigma^2 \Rightarrow \text{?} \end{aligned}$$

$$\text{D.h. } r^2 - w \cdot \bar{z} \neq 0 \quad \forall w \in B_{r+\sigma}(0).$$

(97)

und dadurch

$$g(w) := \frac{f(w)}{r^2 - w \cdot \bar{z}}, \quad g: B_{r+\tilde{\sigma}}(0) \rightarrow \mathbb{C},$$

($\tilde{\sigma} = \min(\sigma, 1)$) als Produkt von 2 holomorphen Funktionen selbst holomorph ist.

Setze $z = w$ ein $\Rightarrow$

$$\frac{f(z)}{r^2 - |z|^2} = g(z) \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(re^{it}) r^2 dt}{r^2 - z r e^{-it}}$$

(jetzt setze $g(w) = \frac{f(w)}{r^2 - w \bar{z}}$ ein ...)

$\Rightarrow$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r^2 - |z|^2) \cdot \frac{1}{r^2} \cdot f(re^{it})}{(r^2 - z \cdot r e^{-it}) (r^2 - r e^{it} \cdot \bar{z})} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r^2 - |z|^2) \cdot f(re^{it})}{(r - z e^{-it}) \cdot (r - \bar{z} e^{it})} \cdot dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r^2 - |z|^2) \cdot f(re^{it})}{|r e^{it} - z|^2} dt$$

(98)

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(re^{it}, z) \cdot f(re^{it}) dt \text{ wie erwünscht.}$$

Korollar 12.15 : $\forall R > 0 \forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(re^{it}, z) dt = 1.$$

Beweis : Setze $f: B_{2R}(0) \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = 1$
in der Formel oben ein.

(99)

Korollar 12.16 : Poisson-Integralformel für harmonische Funktionen. Sei

$$u: B_{r+\varepsilon}(0) \longrightarrow \mathbb{R} \quad (r, \varepsilon > 0) \text{ harmonisch.}$$

Definiere $\phi: \partial B_r(0) \longrightarrow \mathbb{R}$ durch $\phi(z) := u(z)$.

Dann gilt:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(re^{it}) \cdot P(re^{it}, z) dt$$

$\forall z \in B_r(0)$ falls $\ell: B_{r+\varepsilon}(0) \longrightarrow \mathbb{R}$ auch harmonisch ist, mit $\ell|_{\partial B_r(0)} = u|_{\partial B_r(0)}$,

dann gilt $u|_{B_{r+\varepsilon}(0)} \equiv \ell|_{B_{r+\varepsilon}(0)}$.

Beweis: a) von Satz 12.4 $\exists f: B_{r+\varepsilon}(0) \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $f = u + iv$ und f holomorph.

Von Satz 12.14 (Poisson-Integralformel für holomorphe Funktionen) gilt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) P(re^{it}, z) dt$$

$$\forall z \in B_r(0)$$

Aber dann gilt (für $z \in B_r(0)$)

$$u(z) = \operatorname{Re}(f(z)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(f(re^{it})) \cdot P(re^{it}, z) dt$$

(da $P(u, z)$ real ist (Lemma 12.12))

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{it}) \cdot P(re^{it}, z) dt$$

(per Definition von f)

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(re^{it}) \cdot P(re^{it}, z) dt$$

b). für $z \in B_r(0)$ muss gelten

$$l(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(re^{it}) \cdot P(re^{it}, z) dt$$

von Teil (a).

D.h. $l, u: B_{r/2}(0) \rightarrow \mathbb{R}$ sind harmonisch

mit $l \equiv u|_{B_r(0)}$. Sei $f = u + iv: B_{r/2}(0) \rightarrow \mathbb{C}$

$g = l + im: B_{r/2}(0) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph

Funktionen (existieren wie im Teil (a) gezeigt worden ist).

101

Auf $B_r(0)$ gilt:

$$u = l, \text{ und dadurch}$$

$$v = m + c \text{ für ein } c \in \mathbb{R} : \text{ siehe}$$

12.4 (v ist bis auf eine Konstante
eindeutig bestimmt). D.h. u.B.d.A ist

$$v = m \text{ (sonst addiere } c \text{ zu } v) : v).$$

$$\text{auf } B_r(0). \text{ D.h. } f|_{B_r(0)} = g|_{B_r(0)}.$$

$$\text{Identitätssatz} \Rightarrow f \equiv g \text{ auf } B_{r+\varepsilon}(0)$$

$$\Rightarrow u \equiv l \text{ auf } B_{r+\varepsilon}(0).$$

