

Jetzt möchten wir das Dirichlet Problem

für gegebene Anfangsdaten $\phi: \partial B_r(0) \rightarrow \mathbb{R}$,

$\phi \in C^0(\partial B_r(0), \mathbb{R})$ lösen. d.h. wir

suchen $u \in C^2(B_r(0), \mathbb{R}) \cap C^0(\overline{B_r(0)}, \mathbb{R})$

das

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\partial B_r(0)} = \phi \end{cases} \quad (DI)$$

löst.

Falls das Problem lösbar wäre,

da gilt:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{it}) \cdot P(re^{it}, z) dt$$

$\forall z \in B_{r/2}(0) \subseteq B_r(0)$ von dem
Korollar (12.16).

und $u \in C^2(B_r(0), \mathbb{R}) \cap C^0(\overline{B_r(0)}, \mathbb{R})$

(102)

$\Rightarrow$ Für $z \in B_{r-\varepsilon}(0)$ fest,

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u((r-\varepsilon)e^{it}) \cdot P((r-\varepsilon)e^{it}, z) d\mathbb{I}$$

$$\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{it}) \cdot P(re^{it}, z) d\mathbb{I}$$

(Integral konvergiert gleichmäßig)

$$\text{ie. } u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{it}) \cdot P(re^{it}, z) d\mathbb{I}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(re^{it}) \cdot P(re^{it}, z) d\mathbb{I}$$

$\forall z \in B_{r-\varepsilon}(0)$. $\varepsilon > 0$ beliebig

$$\Rightarrow u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(re^{it}) \cdot P(re^{it}, z) d\mathbb{I} \quad \forall z \in B_r(0).$$

D.h.: Falls $u \in C^2(B_r(0)) \cap C^0(\overline{B_r(0)}, \mathbb{R})$ existiert, $\int_0^{2\pi} \phi(re^{it}) d\mathbb{I}$

dann muss

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(re^{it}) \cdot P(re^{it}, z) d\mathbb{I}$$

Aus diesen Grund ~~ist~~ versuchen wir zu zeigen, dass $v: B_r(0) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$v(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(re^{it}) \cdot P(re^{it}, z) dt$$

erfüllt $u \in C^2(B_r(0), \mathbb{R}) \cap C^0(\overline{B_r(0)}, \mathbb{R})$
und löst (DE).

Satz 12.7 (Lösung des Dirichlet Problems auf $\overline{B_r(0)}$).

Sei $\phi: \partial B_r(0) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ($r > 0$).

$\exists u: \overline{B_r(0)} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$u \in C^\infty(B_r(0), \mathbb{R}) \cap C^0(\overline{B_r(0)}, \mathbb{R})$ und

$u|_{B_r(0)}: B_r(0) \rightarrow \mathbb{R}$ ist harmonisch

und $u|_{\partial B_r(0)} \equiv \phi$.

Beweis:

Definiere

$v: B_r(0) \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(re^{it}) \cdot P(re^{it}, z) dt.$$

(105)

Schritt 1: $V \in C^\infty(B_r(0), \mathbb{R})$ mit $\Delta V = 0$

auf $B_r(0)$. Sei $z_0 \in B_{r-\varepsilon}(0)$.

$$V(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(re^{it}) \cdot P(re^{it}, z) dt$$

und $t \mapsto P(re^{it}, z)$ ist unendlich oft reell differenzierbar: für

δ klein ist $P \in C^\infty(\overline{B_\delta}(z_0), \mathbb{R})$ (Ana I/II)

$$\text{und } \frac{\partial V}{\partial x}(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(re^{it}) \cdot \frac{\partial}{\partial x} (P(re^{it}, \cdot)) \Big|_{z_0} dt$$

$$\text{und } \Delta V(z_0) = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(re^{it}) \Delta (P(re^{it}, \cdot)) \Big|_{z_0} dt$$

$$= 0 \quad \text{von Lemma 12.13}$$

Dadurch sehen wir, dass V harmonisch ist (z_0 war beliebig).

Schritt 2: Für $z_0 \in \partial B_r(0)$ gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V(w_k) = \phi(z_0) \quad \forall \text{ Folgen}$$

$$\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq B_r(0) \text{ mit}$$

$$w_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} z_0$$

Für $z \in B_r(0)$ gilt:

(106)

$$v(z) - \phi(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(re^{it}) P(re^{it}, z) dt$$

$$- \phi(z_0)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\phi(re^{it}) - \phi(z_0)) \cdot P(re^{it}, z) dt,$$

da

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(z_0) P(re^{it}, z) dt = \phi(z_0) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(re^{it}, z) dt$$

$$= \phi(z_0) \cdot 1.$$

$$\text{da } \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(re^{it}, z) dt = 1 \quad \text{von Korollar 12.15.}$$

$$\text{D.h. } v(w_k) - \phi(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\phi(re^{it}) - \phi(z_0)) \cdot P(re^{it}, w_k) dt$$

Schreib das als

$$= \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{t_0-\delta} (\phi(re^{it}) - \phi(z_0)) \cdot P(re^{it}, w_k) dt \right. \\ \left. + \frac{1}{2\pi} \int_{t_0+\delta}^{2\pi} \dots \right.$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \dots \right.$$

$$= (I) + (II).$$

Als $\omega_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \omega_0$ konvergiert (I) gegen 0,

$$\text{da } P(re^{it}, z_0)$$

$$= \frac{|re^{it}|^2 - |z_0|^2}{|re^{it} - z_0|^2} = \frac{r^2 - r^2}{1} = 0$$

$$\forall re^{it} \neq z_0 \text{ (d.h. } \forall t \neq t_0).$$

und dadurch konvergiert das Integral von (I) gleichmässig gegen 0.

Das zweite Integral schätzen wir so ab:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \left| \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} (\phi(re^{it}) - \phi(z_0)) \cdot P(re^{it}, \omega_k) dt \right| \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \underbrace{|\phi(re^{it}) - \phi(z_0)|}_{s(\delta)} \cdot |P(re^{it}, \omega_k)| dt \\ & = \frac{1}{2\pi} \cdot s(\delta) \cdot \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} |P(re^{it}, \omega_k)| dt \end{aligned}$$

$$\text{wobei } s(\delta) = \max_{t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]} |\phi(re^{it}) - \phi(re^{it_0})| \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$$

108

$$\leq \frac{1}{2\pi} s(\delta) \cdot \int_0^{2\pi} p(re^{it}, \omega_k) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} s(\delta) \cdot 1 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$$

Wir haben gezeigt, dass $v(\omega_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \phi(z_0)$ ✓

$\{\omega_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq B_r(0)$ mit $\omega_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} z_0$.

Jetzt definiere

$u: \overline{B_r(0)} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$u(z) = \begin{cases} v(z) & \forall z \in B_r(0) \\ \phi(z) & \forall z \in \partial B_r(0) \end{cases}$$

✓ Folgen $\{\omega_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq B_r(0)$ mit $\omega_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} z_0 \in \partial B_r(0)$ gilt:

$$u(\omega_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u(z_0)$$

✓ Folgen $\{\omega_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \partial B_r(0)$ mit $\omega_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} z_0 \in \partial B_r(0)$

$$\text{gilt } u(\omega_k) = \phi(\omega_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \phi(z_0) = u(z_0)$$

da ϕ stetig ist.

13. Singuläre Stellen holomorpher Funktionen

Defn. 13.1: Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $p \in U$ und
 $f: U \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Wir nennen
 p eine isolierte Singularität von f .

Falls wir f zu $\tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{C}$ fortsetzen
 können mit $f = \tilde{f}|_{U \setminus \{p\}}$ und $\tilde{f}$ holomorph,
 dann heißt p eine hebbare Singularität.

Defn 13.2: Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $p \in U$ und
 $f: U \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und nicht hebbar.

Wähle $n \in \mathbb{N}$, Sei $l_n: U \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$

$$l_n(z) = (z-p)^n \cdot f(z).$$

Falls $\forall n \in \mathbb{N}$ p eine nicht hebbare Singularität
 von l_n ist, dann heißt p eine
wesentliche Singularität von f .

Falls $\exists n \in \mathbb{N}$, so dass l_n eine hebbare Singularität

in p ist, dann heißt p eine Polstelle von f .
 man sagt: " f hat einen Pol in p ", bez. " p ist ein Pol von f ".
 In diesem Fall ist

$$N := \min \{ n \in \mathbb{N} \mid l_n \text{ eine hebbare Singularität in } p \text{ hat} \}$$

die Polordnung von der Polstelle p von f

Bemerkung:

(110) $\frac{1}{2}$

pol zu sein ist eine lokale eigenschaft im
folgenden sinn!

a) $f: M \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$ hat ein pol

$$\text{in } p \Rightarrow f|_{B_\varepsilon(p) \setminus \{p\}} : B_\varepsilon(p) \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$$

hat einen pol in p .

b) $f: M \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph,

$$\text{und } f|_{B_\varepsilon(p) \setminus \{p\}} : B_\varepsilon(p) \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$$

hat einen pol in $p \Rightarrow$

$f: M \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$ hat
einen pol in p .

Beispiel 13.3: Sei $f: B_r(0) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f(z) = \frac{1}{z^k} \quad (k \in \mathbb{N}, k \geq 1).$$

① ist nicht hebbbar. Angenommen es wäre. Sei dann

$\tilde{f}: B_r(0) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, mit

$$\tilde{f}|_{B_r(0) \setminus \{0\}} = f, \quad \tilde{f} \text{ ist stetig}$$

$$\Rightarrow \tilde{f}\left(\frac{1}{r}\right) \xrightarrow{r \rightarrow 0} c \in \mathbb{C}.$$

$$\text{Aber } \tilde{f}(r) = \frac{1}{r^k} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \infty \Rightarrow \text{?}$$

Gleiches Argument auch: 0 ist eine nicht hebbare
Singularität von $h_n: B_r(0) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$
 $h_n(z) = z^n f(z) = \frac{1}{z^{k-n}}$ falls $k < n$.

$$\text{Aber } h_k(z) = z^k \cdot f(z) = 1 \quad \forall z \in B_r(0) \setminus \{0\}.$$

$$\text{Definiere } g: B_r(0) \rightarrow \mathbb{C} \quad g(z) = 1. \quad \text{Dann}$$

$$\text{gilt } g|_{B_r(0) \setminus \{0\}} = h_k \text{ und } g \text{ holomorph}$$

(also 0 ist eine hebbare Singularität von h_k)
d.h. g ist eine holomorphe Fortsetzung von h_n zu u .

$\Rightarrow$ 0 ist eine polstelle von f der
Ordnung k .

Beispiel 13.4: Sei $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f(z) = \exp(z^{-1}) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots$$

Sei $g_n: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$

$$g_n(z) = z^n \cdot f(z)$$

$$= z^n + z^{n-1} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!z} + \dots$$

Gleiches Argument wie im Beispiel 13.3

$(r \xrightarrow{\mathbb{C}\mathbb{R}} 0) \Rightarrow 0$ ist eine nicht hebbar

Singularität von $g_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow 0$ ist eine wesentliche Singularität von f .

Lemma 13.5 (Riemann'scher Hebbarkeitsatz).

Sei U offen, $p \in U$, und

$f: U \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit

$$\sup_{q \in U \setminus \{p\}} |f(q)| < \infty. \quad \text{Dann gilt:}$$

p ist eine hebbare Singularität von f .

Beweis: Sei $k := \sup_{q \in U \setminus \{p\}} |f(q)|$ und $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ ^(Lap)

$$g(z) := \begin{cases} f(z) \cdot (z-p) & \forall z \neq p \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Behauptung: g ist stetig: Sei $\{z_k\} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} p$
 $\in U \setminus \{p\}$

$$|g(z_k)| = |f(z_k) \cdot (z_k - p)|$$

$$\leq k \cdot |z_k - p| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

$$= g(p)$$

Weg von p ist g ^{auch} stetig, da
 $g|_{U \setminus \{p\}} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist.

D.h. $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ erfüllt:

$g|_{U \setminus \{p\}}$ holomorph, $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ ist

stetig. Korollar 9.9 $\Rightarrow g: U \rightarrow \mathbb{C}$ selbst holomorph ist.

Es gilt auch $g(p) = 0$.

Fall 1: Ordnung der Nullstelle p von g ist $= \infty$.

Dann gilt (per Def.) $\exists B_\varepsilon(p) \subseteq U$ mit

$$g|_{B_\varepsilon(p)} \equiv 0.$$

$$\Rightarrow g(z) = f(z)(z-p) = 0 \quad \forall z \in B_\varepsilon(p)$$

$$\Rightarrow f(z) = 0 \quad \forall z \in B_\varepsilon(p) \setminus \{p\}$$

$\Rightarrow p$ ist eine Hebbne Singularität von f :

Setze f zu $\tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{C}$, $\tilde{f}(p) = 0$ auf $B_\varepsilon(p)$, $\tilde{f} = f$ auf $U \setminus B_\varepsilon(p)$ fort.

Fall 2: Ordnung der Nullstelle p von $g = N < \infty$,
und $N \geq 2$. (Lemma 11.3)

Dann gilt: $\exists$ analytische Nullumf. $f, l: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $l(p) \neq 0$.

$$g(z) = (z-p)^N \cdot l(z) \quad \forall z \in U.$$

Aber $g(z) = (z-p) \cdot f(z) \quad \forall z \in U \setminus \{p\}$
per Def.

(175)

$$\Rightarrow f(z) = (z-p)^{N-1} \cdot l(z) \quad \forall z \in U \setminus \{p\}. \\ (N \geq 2)$$

$$\Rightarrow f(w_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \forall \text{ Folge } \{w_k\} \in U \setminus \{p\}, \\ k \in \mathbb{N}$$

Definiere

$$\tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{C} \\ \tilde{f}(z) = \begin{cases} 1 & z=p \\ f(z) & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\tilde{f}$ stetig, $\tilde{f}|_{U \setminus \{p\}}$ holomorph

(kor 9.4)

$$\Rightarrow \tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorph.}$$

Fall 3: Ordnung der Nullstelle p von $g=1$.

i.e. $\exists \ell: U \rightarrow \mathbb{C}, \ell(p) \neq 0, \ell \text{ holomorph.}$

$$g(z) = (z-p) \ell(z) \quad \forall z \in U$$

then

$$g(z) = (z-p) f(z) \quad \forall z \in U \setminus \{p\}.$$

$$\Rightarrow f(z) = \ell(z) \quad \forall z \in U \setminus \{p\}.$$

Setze f zu $\tilde{f} = \ell$ fort.



(116)

Lemma 13.6: Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $p \in U$,

$f: U \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt:

p ist ein Pol von f der Ordnung N

$\Leftrightarrow \exists g: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $g(p) \neq 0$
und $f(z) = (z-p)^{-N} g(z) \quad \forall z \in U \setminus \{p\}$.

(117)

Beweis: ($\Rightarrow$). Der Beh. von von pol der Ordnung N :

$l_N: U \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$, $l_N(z) = f(z) (z-p)^N \quad \forall z \in U \setminus \{p\}$
 hat eine hebbare Singularität in p .

Sei $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ die holomorphe Fortsetzung von
 l_N . Dann gilt: $f(z) = \frac{g(z)}{(z-p)^N} \quad \forall z \in U \setminus \{p\}$.

Bleibt z.z., dass $g(p) \neq 0$.

Falls $g(p) = 0$, dann gilt

$g(z) = h(z) \cdot (z-p)^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, und
 eine holomorphe Fn. $h: U \rightarrow \mathbb{C}$, wobei
 $n = \text{Ordnung der Nullstelle } p \text{ von } g \text{ (Lemma 11.3)},$
 $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

$$\Rightarrow f(z) = h(z) \frac{(z-p)^n}{(z-p)^N} = \frac{h(z)}{(z-p)^{N-n}} \quad \forall z \in U \setminus \{p\}.$$

Daher d.h. $l_{N-n}: U \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$l_{N-n}(z) = (z-p)^{N-n} \cdot f(z) = h(z) \quad \forall z \in U \setminus \{p\}$$

hat eine hebbare Singularität, im Widerspruch

zu $N = \text{Ordnung des Pols } p \text{ von } f$.
 Dies beweist ($\Rightarrow$)

(Beweis $\Leftarrow$)

($\Leftarrow$): Angenommen $\exists N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $g(p) \neq 0$ mit

$$f(z) \cdot (z-p)^N = g(z) \quad \forall z \in U \setminus \{p\}$$

Falls $\exists n \in \mathbb{N}$ und $h: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit

$$f(z) \cdot (z-p)^n = h(z) \quad \forall z \in U \setminus \{p\},$$

dann gilt:

$$f(z) = \frac{g(z)^N}{(z-p)^N} = \frac{h(z)}{(z-p)^N} \quad \forall z \in U \setminus \{p\}$$

D.h.

$$g(z) = h(z) \cdot (z-p)^{N-n}$$

$$\Rightarrow g(p) = \lim_{z \rightarrow p} g(z) = \textcircled{0} \Rightarrow \textcircled{?}$$

D.h. der pol p von f hat
Ordnung N (oder N hat)

$f(z) \cdot (z-p)^N$ eine NICHT lebbare
Singularität)

Lemma 13.7 : p ein Pol von $f: U \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$ 18 $\frac{1}{4}$
 $\Rightarrow \exists B_\varepsilon(p) \subseteq U$, so
 dass $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in B_\varepsilon(p) \setminus \{p\}$.