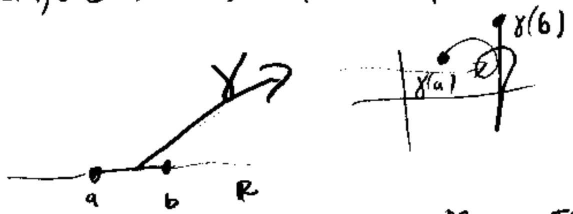
7. komplexe Wegintegrale.

Defn. 7.1: $\gamma: [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt weg, falls γ stetig ist.



Defn 7.2. $\gamma: [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ $\gamma = \gamma^{re} + i\gamma^{Im}$,

$(\gamma^{re}(t) := re(\gamma(t)), \gamma^{Im}(t) := Im(\gamma(t)) \ \forall t \in I)$

heißt differenzierbar in t falls

$\gamma^{re}: [a,b] \to \mathbb{R}$ und $\gamma^{Im}: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

differenzierbar in t sind. In dem Fall ist $\gamma'(t) := \gamma^{re'}(t) + i\gamma^{Im'}(t)$.

$\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt stetig differenzierbar (C^k)

falls $\gamma^{re}: [a,b] \to \mathbb{R}$ und $\gamma^{Im}: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ $(\gamma^{re}, \gamma^{Im} \in C^k([a,b],\mathbb{R}))$

stetig differenzierbar sind. ($m: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diff $\Leftrightarrow$ m diff. überall, und $m': [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig). ($m \in C^k$

Defn. 7.3: Sei $\gamma: [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig differenzierbar mit $\gamma([a,b]) \subset U \subset \mathbb{C}$.

Sei $f: U \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig (Bem: wir setzen NICHT voraus, dass U offen ist!).

$\int_\gamma f(z) dz$ ist die komplexe Zahl

$$\int_\gamma f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$ und heißt

das Wegintegral der Funktion f über den weg γ.

Genauer gesagt:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b \mathrm{Re}\,(f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t))\,dt + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t))\,dt$$

Falls $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ nur stückweise stetig differenzierbar ist, (d.h. $\gamma : [a=a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \dots \cup [a_{k-1}, a_k = b] \to \mathbb{C}$ ist stetig, $a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$, und $\gamma : [a_i, a_{i+1}] \longrightarrow \mathbb{C}$ ist differenzierbar $\forall i = 0, \dots, k-1$), dann heißt γ einen <u>Integrationsweg</u> und wir definieren

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{a_0}^{a_1} f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt + \int_{a_1}^{a_2} f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt$$

$$+ \dots + \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt$$

Erinnerung ~~...~~ von Ana I/II: Eine Zerlegung $\hat{Z}$ von $[a,b]$ ist eine geordnete endliche Menge $\hat{Z} = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b\}$. Die Feinheit $\sigma(\hat{Z})$ von $\hat{Z}$ ist $\sigma(\hat{Z}) = \max_{i \in \{0,\dots,N-1\}} |t_{i+1} - t_i|$.

$\operatorname{Ord}(\hat{Z}) = N+1$ falls $\hat{Z} = \{a = t_0 < \cdots < t_N = b\}$. Eine beschränkte Fn. $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ist R.I. falls $\exists A \in \mathbb{R}$ mit

a) $\lim\limits_{\sigma(\hat{Z}) \to 0} \sum\limits_{i=0}^{N-1} f(c_i)(t_{i+1} - t_i)$ existiert $= A$

($c_i \in [t_i, t_{i+1}]$ beliebig).

(d.h. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ so daß $\forall \hat{Z}$ mit $\sigma(\hat{Z}) < \delta$ gilt: $\left| \sum\limits_{i=0}^{N-1} f(c_i)(t_{i+1} - t_i) - A \right| \leq \varepsilon$, wobei $c_i \in [t_i, t_{i+1}]$ beliebig sind.)

$\Leftrightarrow$ (äquivalent) Für eine beschränkte Fn. $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ Def. mit Treppen f. (Ana II)

(siehe Forster Ana I):

$$\int_a^{b*} f(x)\,dx := \inf\left\{ \int_a^b \varphi(x)\,dx : \varphi \in T[a,b],\ \varphi \geq f \right\}$$

$$\int_{a*}^{b} f(x)\,dx := \sup\left\{ \int_a^b \varphi(x)\,dx : \varphi \in T[a,b],\ \varphi \leq f \right\}.$$

$$\text{R.I.} \Leftrightarrow \int_a^b f^* = \int_a^b f_* .$$

Treppen f. sind konstant auf $]x_i, x_{i+1}[$.

Propn/Defn 7.4: Sei $\gamma: [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ ein Integrationsweg und sei $f: U \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig mit $\gamma([a,b]) \subseteq U$.

Es gilt:

$$\lim_{\sigma(\hat{Z}) \to 0} \sum_{i=0}^{N-1} f(\gamma(t_i)) \cdot (\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i))$$

$\hat{Z} = \{ t_0 = a < \cdots < t_N = b \}, N \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung

$$= \int_\gamma f(z)\,dz$$

weiterhin gilt: $\left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| \leq \sup_{t \in [a,b]} |f(\gamma(t))| \cdot L(\gamma)$

wobei $L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$. $L(\gamma)$ heißt die "Länge von γ".

Beweis: Sei $\gamma: [a,b] \longmapsto \mathbb{C}$ stetig diff $\Rightarrow \gamma': [a,b] \to \mathbb{C}$

$[a,b]$ kompakt $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, so dass

$|\gamma^{Re'}(t) - \gamma^{Re'}(s)| \leq \varepsilon$ $\forall t,s$ mit $|t-s| \leq \delta$.

und $|\gamma^{Im'}(t) - \gamma^{Im'}(s)| \leq \varepsilon$ (7.1)

sei $\hat{Z}$ eine Zerlegung mit $\sigma(\hat{Z}) \leq \delta$.

$$\sum_{i=0}^{N-1} f(\gamma(t_i)) \cdot (\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i))$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} f(\gamma(t_i)) \cdot \frac{\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)}{(t_{i+1} - t_i)} \cdot (t_{i+1} - t_i)$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} f(\gamma(t_i)) \cdot \left[\frac{(\gamma^{Re}(t_{i+1}) - \gamma^{Re}(t_i))}{(t_{i+1} - t_i)} + i \frac{(\gamma^{Im}(t_{i+1}) - \gamma^{Im}(t_i))}{(t_{i+1} - t_i)} \right] (t_{i+1} - t_i)$$

(mittelwertsatz für $\gamma^{Im}, \gamma^{Re} : [a,b] \to \mathbb{R}$)

$$= \sum_{i=0}^{N-1} f(\gamma(t_i)) \cdot (\gamma^{Re'}(s_i) + i \gamma^{Im'}(\tilde{s_i})) \cdot (t_{i+1} - t_i)$$

wobei $s_i, \tilde{s_i} \in (t_i, t_{i+1})$.

$$= \underbrace{\sum_{i=0}^{N-1} f(\gamma(t_i)) \cdot \gamma'(t_i)(t_{i+1} - t_i)}_{\stackrel{!!}{(I)}}$$

$$- \underbrace{\sum_{i=0}^{N-1} f(\gamma(t_i)) \cdot \left[\gamma'(t_i) - (\gamma^{Re'}(s_i) + i \gamma^{Im'}(\tilde{s_i}))\right](t_{i+1} - t_i)}_{\stackrel{!!}{(II)}}$$

$$|(II)| \le \sup_{t \in [a,b]} |f(\gamma(t))| \cdot \sum_{i=0}^{N-1} 2\varepsilon \cdot (t_{i+1} - t_i) \quad (\text{wegen } (7.1))$$

$$\le 2\varepsilon \cdot \sup_{t \in [a,b]} |f(\gamma(t))| \cdot |b-a|.$$

$\to 0$ d/s $\sigma(\hat{z}) \to 0$.

$$(\mathrm{I}) = \sum_{i=0}^{N-1} f(\gamma(t_i)) \cdot \gamma'(t_i)(t_{i+1} - t_i)$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} g(t_i) \cdot (t_{i+1} - t_i),$$

wobei $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ $g(t) := f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ ist.

g ist stetig $\Rightarrow g$ riemann Integrab. von Ana I $\Bigg\} \Rightarrow (\mathrm{I}) \xrightarrow[\sigma(\hat{z}) \to 0]{} \int_a^b g(t)\,dt$

$$= \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt$$

per Def.

$$= \int_\gamma f(z)\,dz$$

weiterhin gilt

$$|\mathrm{II}| \leq \sup_{t \in [a,b]} |f(\gamma(t))| \cdot \sum_{i=0}^{N-1} |\gamma'(t_i)|(t_{i+1} - t_i) = \ldots$$

$$\xrightarrow{\sigma(\hat{z}) \to 0} \sup_{t \in [a,b]} |f(\gamma(t))| \cdot \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$$

$$\Rightarrow |\mathrm{I} + \mathrm{II}| \leq |\mathrm{I}| + |\mathrm{II}| \leq \ldots \xrightarrow[\sigma(\hat{z}) \to 0]{} \sup_{t \in [a,b]} |f(\gamma(t))| \; L(\gamma)$$

$\downarrow \sigma(\hat{z}) \to 0$

$$\Rightarrow \left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| \leq \sup_{t \in [a,b]} |f(\gamma(t))| \, L(\gamma).$$

Beweis von propn. 7.5 weiter:

Zerlegung $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig diff. $\hat{Z} = t_0 = a < t_1 < \dots < t_N = b$ von $[a,b]$, $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig mit $\gamma([a,b]) \subseteq U$.

wir zeigten: $\sum_{i=0}^{N-1} f(\gamma(t_i)) \cdot (\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i))$

$$= \underbrace{\sum_{i=0}^{N-1} f(\gamma(t_i)) \cdot \gamma'(t_i)(t_{i+1} - t_i)}_{\overset{!!}{(\mathrm{I})}}$$

$$\underbrace{- \sum_{i=0}^{N-1} f(\gamma(t_i)) \left[\gamma'(t_i) - \left(\gamma^{re\,\prime}(s_i) + i\, \gamma^{Im\,\prime}(\tilde{s_i})\right) \right] (t_{i+1} - t_i)}_{\overset{!!}{(\mathrm{II})}}$$

$s_i, \tilde{s_i} \in [t_i, t_{i+1}]$.

wir zeigten,

$$(|\mathrm{II}|) \xrightarrow{\sigma(\hat{Z}) \to 0} 0, \quad \sigma(\hat{Z}) = \max_{i \in \{0, \dots, N-1\}} |t_{i+1} - t_i|$$

$\underline{\underline{\text{und}}}$ $\mathrm{I} \xrightarrow{\sigma(\hat{z}) \to 0} \int_\gamma f(z)\,dz$ letztes mal.

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{N-1} f(\gamma(t_i))(\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)) = (\mathrm{I}) + (\mathrm{II}) \xrightarrow[\sigma(\hat{Z}) \to 0]{} \int_\gamma f(z)\,dz.$$

Dies war Teil 1 der Aussage von propn 7.5.

Teil II:

Es gilt weiterhin

$$|\mathrm{I}| = \left| \sum_{i=0}^{N-1} f(\gamma(t_i)) \cdot \gamma'(t_i)(t_{i+1}-t_i) \right|$$

$$\leq \sup_{t\in[a,b]} |f(\gamma(t))| \cdot \sum_{i=0}^{N-1} |\gamma'(t_i)| (t_{i+1}-t_i)$$

$$= \sup_{t\in[a,b]} |f(\gamma(t))| \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{N-1} h(t) \cdot (t_{i+1}-t_i)}_{\tilde{\mathrm{I}}} =: \tilde{\mathrm{I}}$$

wobei $h: [a,b] \to \mathbb{R}$, $h(t) := |\gamma'(t)|$.

Riemann Summe

$$\tilde{\mathrm{I}} \xrightarrow[\text{Anal I/II}]{\sigma(\hat{z})\to 0} \sup_{t\in[a,b]} |f(\gamma(t))| \cdot \int_a^b h(t)\,dt$$

$$= \sup_{t\in[a,b]} |f(\gamma(t))| \cdot \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt.$$

von Teil 1

$$\Rightarrow \left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| \xleftarrow{0 \leftarrow \sigma(\hat{z})} |\mathrm{I} + \mathrm{II}| \leq |\mathrm{I}| + |\mathrm{II}| \leq \tilde{\mathrm{I}} + |\mathrm{II}|$$

$$\tilde{\mathrm{I}} + |\mathrm{II}| \xrightarrow{\sigma(\hat{z})\to 0} \sup_{t\in[a,b]} |f(\gamma(t))| \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$$

(von Teil I $|\mathrm{II}| \xrightarrow{\sigma(\hat{z})\to 0} 0$)

$$\Rightarrow \left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| \leq \sup_{t\in[a,b]} \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$$

wie erwünscht.

Schritt 2: γ nur stückweise stetig diff. o.B.d.A. nur ein $c \in [a,b]$ wo γ' nicht stetig (benutze Induktion)

Im Beweis vorher, ersetze $\hat{Z} = \{t_0 < \dots < t_N\}$

durch $\tilde{Z} = \{a = \underset{\tilde t_0}{t_0} < \underset{\tilde t_1}{t_1} < \dots < \underset{\tilde t_j}{t_j} < \underset{\tilde t_{j+1}}{c} < \underset{\tilde t_{j+2}}{t_{j+1}} < \dots < \underset{\tilde t_{N+1}}{t_N}\}$

falls $c \in \hat{Z}$.

Dann ist $\sum_{i=1}^{N-1} f(\gamma(t_i)) \cdot (\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i))$

$$= \underbrace{\sum_{i=0}^{j+1} f(\gamma(\tilde t_i))\,(\gamma(\tilde t_{i+1}) - \gamma(\tilde t_i))}_{=(A)} + \underbrace{\sum_{i=j+1}^{N} f(\gamma(\tilde t_i))\,(\gamma(\tilde t_{i+1}) - \gamma(\tilde t_i))}_{=(B)}.$$

jetzt argumentiere wie vorher: einmal auf $[a,c]$, einmal auf $[c,b]$.

Von Schritt 1: $(A) \xrightarrow{\sigma(\hat Z) \to 0} \int_a^c f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$

$(B) \xrightarrow{\sigma(\hat Z) \to 0} \int_c^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt$

$\Rightarrow (A) + (B) \xrightarrow{\sigma(\hat Z) \to 0} \int_\gamma f(z)\,dz.$

Beispiel 7.6: Sei $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) := t + i\cdot 0$,

und sei $f : U \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig

mit $[a,b] = \gamma([a,b]) \subseteq U$. Dann gilt:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt \qquad (\gamma'(t) = 1)$$

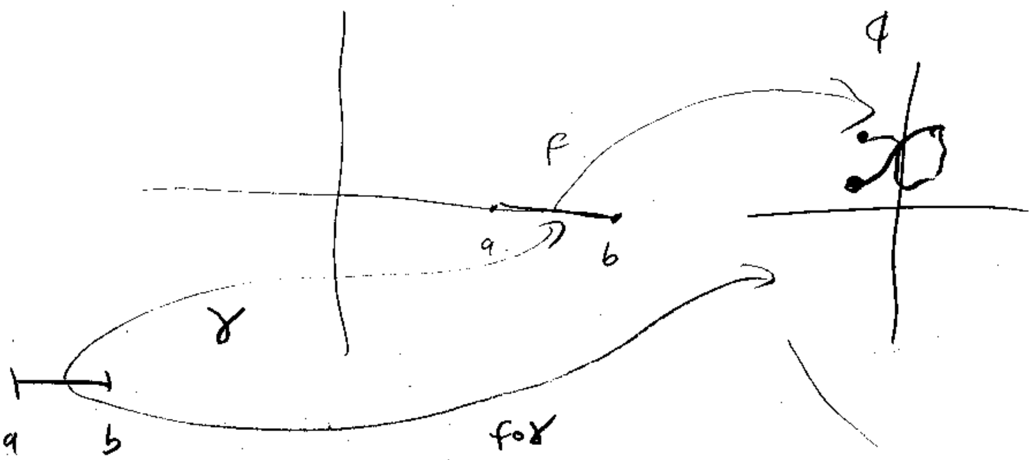
$$= \int_a^b f(\gamma(t))\,dt$$

$$= \int_a^b f^{Re}(t)\,dt \; i \int_a^b f^{Im}(t)\,dt,$$

wobei $\int_a^b f^{Re}(t)\,dt$ $\left(\int_a^b f^{Im}(t)\,dt\right)$ das

Riemann Integral von $f^{Re}\Big|_{[a,b] \subseteq \mathbb{C}} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$\left(f^{Im}\Big|_{[a,b] \subseteq \mathbb{C}} : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}\right)$ ist.



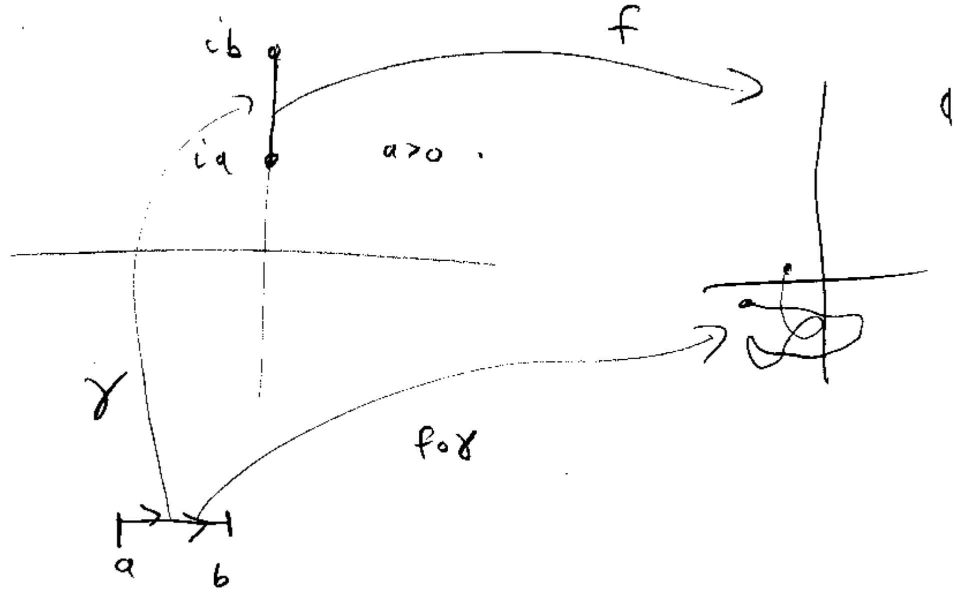
Beispiel ~~77~~: Sei $f : \overset{M}{\overset{\shortparallel}{i[a,b]}} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig, und

$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) := it$. Dann ist

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt$$

$$= \int_a^b f(it)\cdot i\,dt$$

$$= i\int_a^b f^{Re}(it)\,dt - \int_a^b f^{Im}(it)\,dt$$



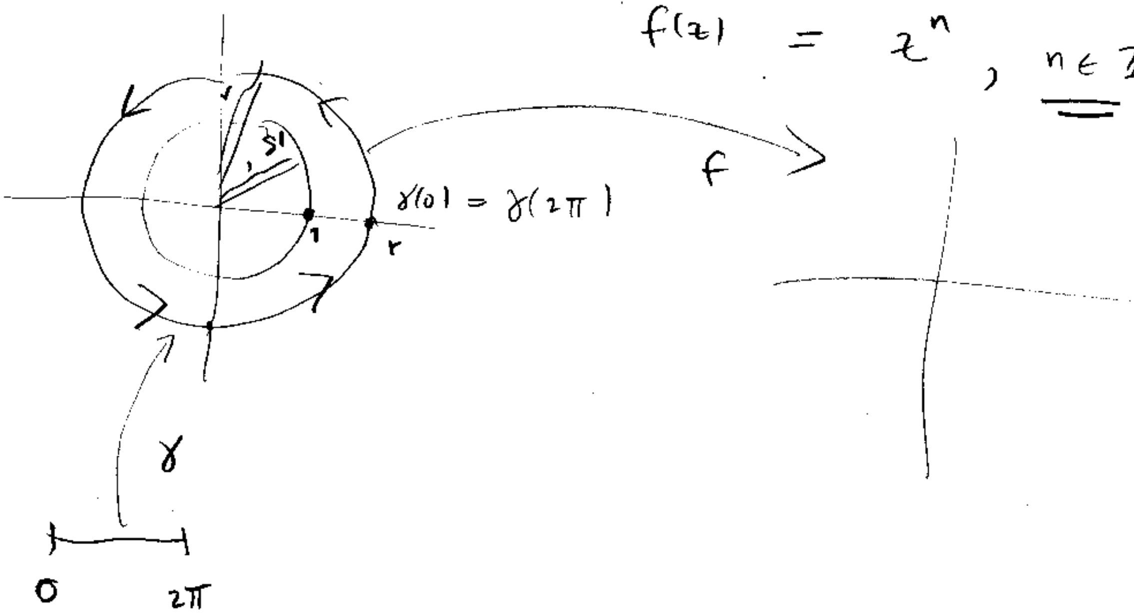
$\boxed{\text{Notation: } \gamma: [a,b] \to U \subseteq \mathbb{C} \Leftrightarrow \gamma: [a,b] \to \mathbb{C} \text{ und } \gamma([a,b]) \subseteq U.}$

Beispiel 7: Sei $\gamma: [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{C}$

$\gamma(t) := re^{it}$, $r > 0$ (stetig diff.).

Es gilt. $\gamma'(t) = ire^{it}$. Sei $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$

$f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{Z}$.



Dann gilt:
$$\int_\gamma z^n \, dz = \int_\gamma f(z) \, dz$$
$$= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt$$
$$= \int_0^{2\pi} (\gamma(t))^n (ire^{it}) \, dt$$
$$= \int_0^{2\pi} i \cdot r^n e^{int} re^{it} \, dt$$

$$= i r^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\, dt$$

(Euler Formel)

$$= i r^{n+1} \left(\int_0^{2\pi} \cos((n+1)t) + i \int_0^{2\pi} \sin((n+1)t)\, dt \right)$$

$$= \begin{cases} i r^{n+1} \left(\sin((n+1)t)\Big|_0^{2\pi} - i \cos((n+1)t)\Big|_0^{2\pi} \right) = 0 & \text{falls } n+1 \neq 0 \ (\text{d.h. } n \neq -1) \\ i r^0 \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1\, dt + i \int_0^{2\pi} 0\, dt \right) = i \cdot 2\pi & \text{falls } n+1 = 0 \ (\text{d.h. } n = -1) \end{cases}$$

D.h. für $n \in \mathbb{Z}$ ist

$$\int_\gamma z^n\, dz = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{für } n = -1. \end{cases}$$

Notation: $\gamma : [a,b] \to U \subseteq \mathbb{C} \iff \gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ und $\gamma([a,b]) \subseteq U$.

Propn. 7.9: Sei $\gamma : [a,b] \to U \subseteq \mathbb{C}$ ein Integrationsweg und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig.

i) Sei $\varphi : [c,d] \subseteq \mathbb{R} \to [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$.

Dann gilt: $\displaystyle\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)\,dz = \int_{\gamma} f(z)\,dz$.

($\gamma\circ\varphi : [c,d] \to U \subseteq \mathbb{C}$ ist auch ein Integrationsweg).

ii) Sei $\varphi : [c,d] \subseteq \mathbb{R} \to [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $\varphi(c) = b$, $\varphi(d) = a$.

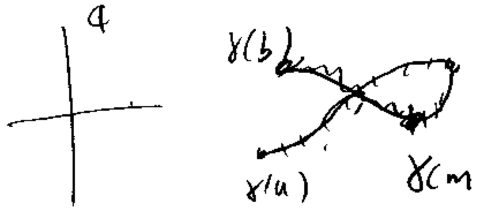
Dann gilt: $\displaystyle\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)\,dz = -\int_{\gamma} f(z)\,dz$.

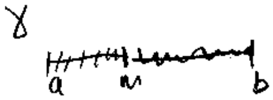
iii) Sei $m \in (a,b)$. Dann gilt:

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma|_{[a,m]}} f(z)\,dz + \int_{\gamma|_{[m,b]}} f(z)\,dz$$

wobei $\gamma|_{[a,m]} : [a,m] \to U \subseteq \mathbb{C}$ ist

$$\gamma|_{[a,m]}(t) := \gamma(t).$$





Beweis: iii) folgt von der Def. von $\int_\gamma f dz$.

i) + ii):
$$\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)\,dz = \int_c^d f((\gamma\circ\varphi)(t))\cdot(\gamma\circ\varphi)'(t)\,dt$$

Kettenregel

$$= \int_c^d \Big(\underbrace{(f\circ\gamma)(\varphi(t))\cdot\gamma'(\varphi(t))}_{h(\varphi(t))}\Big)\varphi'(t)\,dt$$

wobei $h(s) := (f\circ\gamma)(s)\cdot\gamma'(s)$

$h: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig

$h(s) = (f\circ\gamma)$

substitution von Ana I(I)

$$= \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} h(\varphi)\,d\varphi\,.$$

$$= \int_a^b f(\gamma(\varphi))\cdot\gamma'(\varphi)\,d\varphi \quad \text{für (i)}$$

Beziehungsweise

$$\int_b^a f(\gamma(\varphi))\,\gamma'(\varphi)\,d\varphi \quad \text{für (ii)}$$

$$= -\int_a^b f(\gamma(\varphi))\,\gamma'(\varphi)\,d\varphi\,.$$

Propn 7.10 Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f: U \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig komplex differenzierbar ($\Rightarrow$ holomorph) und $\gamma: [a,b] \longrightarrow U \subseteq \mathbb{C}$ ein Integrationsweg, so gilt:

$$\int_\gamma f'(z)\,dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Beweis: o.B.d.A ist $\gamma: [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig differenzierbar: sonst argumentiere auf Stücke $[a_i, a_{i+1}]$ von $[a,b] = [a,a_1] \cup [a_1,a_2] \cup \dots \cup [a_{n-1}, b]$ mit $\gamma_i = \gamma|_{[a_i, a_{i+1}]} : [a_i, a_{i+1}] \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig differenzierbar und benutze:

$$\int_\gamma f'(z)\,dz = \int_{\gamma_0} f'(z)dz + \dots + \int_{\gamma_{n-1}} f'(z)dz$$

$$= \cancel{f(\gamma(a_1))} - f(\gamma(a)) + f(\gamma(a_2)) - \cancel{f(\gamma(a_1))}$$
$$+ \dots \quad f(\gamma(b)) - \cancel{f(\gamma(a_{n-1}))}$$
$$= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

$(f\circ\gamma)'(t)$ rechnet man nach ist $= f'(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)$

$$\Rightarrow \int_\gamma f'(z)\,dz \overset{\text{(Defn.)}}{=} \int_a^b f'(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$$

$$= \int_a^b (f\circ\gamma)'(t)\,dt$$

$$= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

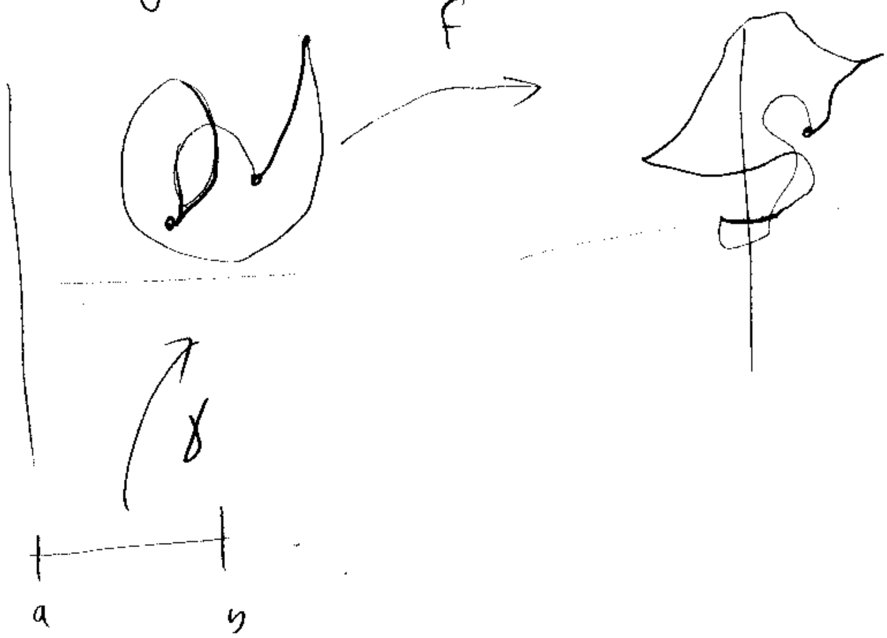
von dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung auf $\int_a^b (f\circ\gamma)^{re\,'}(t)dt$ und $\int_a^b (f\circ\gamma)^{Im\,'}(t)dt$ angewandt. ⊠

Korollar 7.11 Sei f, γ wie im Propn. 7.10.

Sei $\gamma : [a,b] \to U \subseteq \mathbb{C}$ weiterhin geschlossen,

d.h. $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Dann ist $\int_\gamma f'(z)\,dz = 0$



7.12 i) Damit sieht man, dass für $n \neq -1$,

$\int_\gamma z^n\,dz = 0 \quad \forall\ \gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ geschlossene

Integrationsweg: $\int_\gamma z^n = \int_\gamma f'(z)\,dz$ mit

$f(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1).$

ii) weiterhin sehen wir folgendes: sei

$\gamma: [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$ $(\gamma(0)=\gamma(1))$

$\exists$ keine holomorphe Fn. $f: U \longrightarrow \mathbb{C}$, U offen mit

$\gamma([0,2\pi]) \subseteq U$ und $f'(z) = \frac{1}{z}$.

Falls so was existieren würde, dann gilt:

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = \int_\gamma f'(z)\, dz = 0 \quad \text{im Widerspruch}$$

zu Beispiel 3.7 für $n=-1$. Insbesondere, dies impliziert $\exists$ keine holomorphe $f: \mathbb{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $f'(z)=\frac{1}{z}$.

wir sagen: $\frac{1}{z}$ hat keine Stamm-Funktion auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

— iii) Falls $\underset{[a,b]}{\overset{\shortparallel}{I}} \overset{\gamma}{\longrightarrow} \underset{U}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^+}} \subseteq \mathbb{C}$, geschlossene Integrationsweg

$(\gamma(a)=\gamma(b))$ $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^+ = U$, dann ist $\mathrm{Log}'(z) = \frac{1}{z}$

auf U und damit

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = \int_\gamma \mathrm{Log}'(z)\, dz = 0.$$

Falls $\gamma_\varepsilon: [\varepsilon, 2\pi-\varepsilon] \Rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_\varepsilon(t) := e^{it}$,

dann ist $\gamma_\varepsilon([\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]) \subseteq \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^+$ (aber

γ nicht geschlossen!)

$$\Longrightarrow \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1}{z}\, dz = \int_{\gamma_\varepsilon} \mathrm{Log}'(z)\, dz$$

$$= \mathrm{Log}(\gamma(1-\varepsilon)) - \mathrm{Log}\,(\gamma(\varepsilon))$$

$$= \mathrm{Log}\left(e^{2\pi i(1-\varepsilon)}\right) - \mathrm{Log}\left(e^{2\pi i \varepsilon}\right)$$

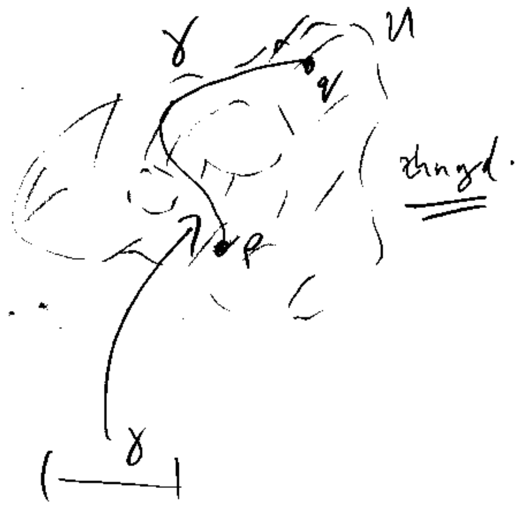
$$= i\,(2\pi\,(1-\varepsilon)) - i2\pi\varepsilon = i2\pi - 4i\pi\varepsilon$$

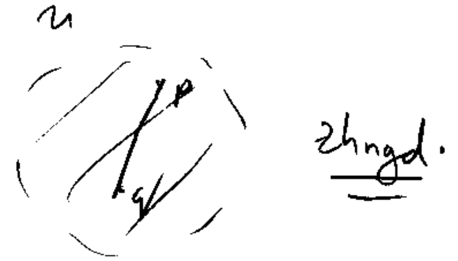
$$\xrightarrow{\varepsilon \to 0} 2\pi i = \int_{\gamma} \frac{1}{z}\, dz.$$

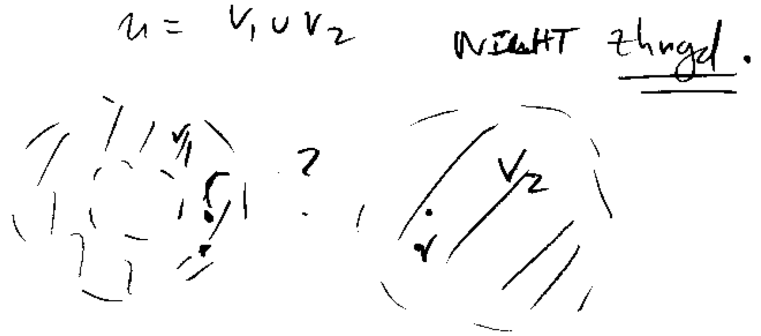
Def 7.7[3]: $\mathcal{U}$ offen $\subseteq \mathbb{C}$ ist wegzusammenhängend falls $\forall\, p, q \in \mathcal{U}$ $\exists$ Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma([a,b]) \subseteq \mathcal{U}$ und $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$.

Bilder

ÜA 9 $\mathcal{U}$ offen wegzshngd ist äquivalent zu $\mathcal{U}$ ist zusammenhängend; $\mathcal{U}$ ist zusammenhängend bedeutet: falls wir $\mathcal{U} = V_1 \cup V_2$ mit V_1, V_2 offen und $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$, dann ist $(V_1 = \emptyset$ und $V_2 = \mathcal{U})$ oder $(V_2 = \emptyset$ und $V_1 = \mathcal{U})$.







Defn. 7.14

Sei $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\sigma : [c,d] \longrightarrow \mathbb{C}$ Kurven.

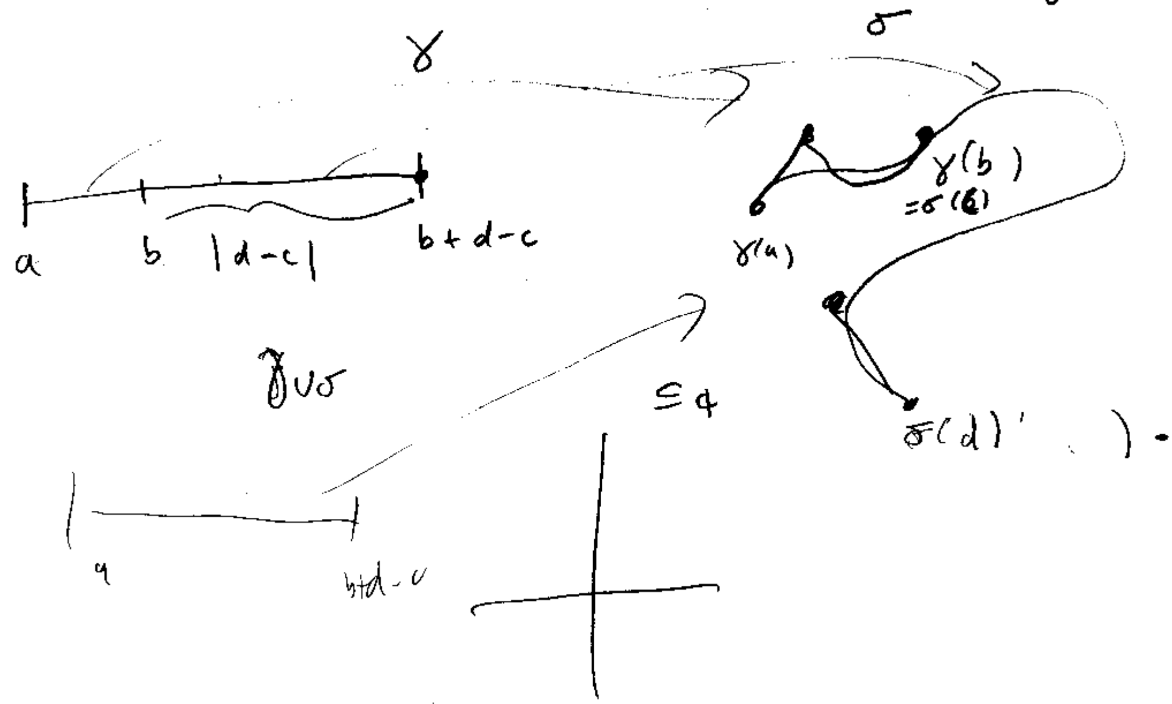
$\gamma \cup \sigma$ bezeichnet die Kurve:

$$\gamma \cup \sigma : [a, b+d-c] \longrightarrow \mathbb{C},$$

$$\gamma \cup \sigma (t) := \begin{cases} \gamma(t) & \forall t \in [a,b] \\ \sigma(c+t-b) & \forall t \in [b, b+d-c] \end{cases}$$

D.h. man macht γ zuerst und dann σ.

Falls γ, σ stetig sind, und $\gamma(b) = \sigma(c)$, dann ist $\gamma \cup \sigma : [a, b+d-c] \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig.



Propn. 7.15: Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ offen

Es gilt: $\mathcal{U}$ ist zusammenhängend $\Leftrightarrow$

$\forall\ p, q \in \mathcal{U}$, $\exists$ Integrationsweg $\gamma : [a,b] \to \mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ (also $\gamma([a,b]) \subseteq \mathcal{U}$) mit $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$.

Beweis: $(\Rightarrow)$. Sei $\mathcal{U}$ zusammenhängend.

Sei $p \in \mathcal{U}$ fest. Sei $\mathcal{U}_1 := \{ q \in \mathcal{U} \mid \exists$ Integrationsweg $\gamma : [a,b] \to \mathcal{U}$, $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q \}$. $-\infty < a < b < \infty$, $a, b \in \mathbb{R}$

Behauptung: $\mathcal{U}_1$ ist offen: Beweis von Behauptung: Falls $q \in \mathcal{U}_1 \Rightarrow q \in \mathcal{U}$ und $\exists$ Integrationsweg $\gamma : [a,b] \to \mathcal{U}$ mit $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$.

$q \in \mathcal{U} \Rightarrow B_\varepsilon(q) \subseteq \mathcal{U}$ für $\varepsilon > 0$ klein genug (da $\mathcal{U}$ offen ist).

Für $m \in B_\varepsilon(q)$ sei

$\sigma : [0,1] \to B_\varepsilon(q) \subseteq \mathcal{U}$,

$\sigma(t) := q(1-t) + tm$

Dann ist $\gamma \cup \sigma : [a, b+1] \to \mathcal{U}$ ein Integrationsweg mit

$(\gamma \cup \sigma)(a) = p$, und $(\gamma \cup \sigma)(b+1) = m$

D.h. $m \in \mathcal{U}_1$. $m \in B_\varepsilon(q)$ war beliebig

$\Rightarrow B_\varepsilon(q) \subseteq \mathcal{U}_1 \Rightarrow \mathcal{U}_1$ offen.

Beh. 1 ist damit gezeigt.

Behauptung 2 $\quad \mathcal{U}_2 := (\mathcal{U}_1)^c \cap \mathcal{U}$ ist offen.

Beweis. Sei $r \in (\mathcal{U}_1)^c \cap \mathcal{U}$. $\Rightarrow$ $r \in \mathcal{U}$.

$\Rightarrow \quad B_\varepsilon(r) \subseteq \mathcal{U}$ für $\varepsilon > 0$ klein genug.

sei $q \in B_\varepsilon(r)$ beliebig. Falls $q \in \mathcal{U}_1$ wäre$^{(*)}$, dann

existiert ein Int.weg $\gamma : [a,b] \to \mathcal{U}$ mit

$\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$.

sei $\sigma : [0,1] \to B_\varepsilon(r) \subseteq \mathcal{U}$

$\sigma(t) := q(1-t) + r \cdot t$.

Dann ist $\gamma \cup \sigma : [a, b+1] \to \mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ ein Integrationsweg

zwischen $(\gamma \cup \sigma)(a) = p$ und $(\gamma \cup \sigma)(b+1) = r$.

$\Rightarrow \quad r \in \mathcal{U}_1$. $\Rightarrow$ ↯ (da $r \in (\mathcal{U}_1)^c \cap \mathcal{U}$).

D.h. $q \in (\mathcal{U}_1)^c$ (die Annahme (*) kann nicht stimmen)

$q \in B_\varepsilon(r)$ war beliebig $\Rightarrow \quad B_\varepsilon(r) \subseteq (\mathcal{U}_1)^c$

$\Rightarrow \quad B_\varepsilon(r) \subseteq (\mathcal{U}_1)^c \cap \mathcal{U}$.

$\Rightarrow (\mathcal{U}_1)^c \cap \mathcal{U}$ offen. Beh. 2 ist damit gezeigt.

$$\mathcal{U} = \underbrace{(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U})}_{\substack{= \\ \mathcal{U}_1 \\ \text{offen}}} \cup \underbrace{((\mathcal{U}_1)^c \cap \mathcal{U})}_{\substack{= \\ \mathcal{U}_2 \\ \text{offen}}}$$

$\mathcal{U}$ zhngd. $\Rightarrow$ $\mathcal{U}_2 = \emptyset$ (da $\mathcal{U}_1 \neq \emptyset$, da $p \in \mathcal{U}_1$).
und $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1$ $\Rightarrow$ $\mathcal{U}$ Integrationsweg zusammenhängend.

($\Leftarrow$:) : $\mathcal{U}$ sei Integrationsweg zusammenhängend.

Sei $\mathcal{U} := \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ mit $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ offen,
und $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \emptyset$. Annahme: $\mathcal{U}_1 \neq \emptyset$ und $\mathcal{U}_2 \neq \emptyset$. Sei $p \in \mathcal{U}_1$, $q \in \mathcal{U}_2$.

Sei $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathcal{U}$ ein Int.weg von p nach q (d.h. $\gamma(a) = p$ und $\gamma(b) = q$).

Sei $$s_0 := \sup \{ s \mid \gamma([a,s]) \subseteq \mathcal{U}_1 \}.$$

$\gamma(s) \in \overline{\mathcal{U}}_1$ $\forall$ $s < s_0$ $\Rightarrow$ $\gamma(s_0) \in \overline{\mathcal{U}}_1$. $\gamma(s_0) \notin \mathcal{U}_1$ (sonst zu Def. von s_0) $\Rightarrow$ $\gamma(s_0) \in \partial\mathcal{U}_1$; $\gamma(s_0) \in \mathcal{U}$, $\gamma(s_0) \notin \mathcal{U}_1$
$\Rightarrow$ $\gamma(s_0) \in \mathcal{U}_2$ (da $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$) $\Rightarrow$ $\mathcal{U}_2 \cap \partial\mathcal{U}_1 \neq \emptyset$
$\Rightarrow$ $\mathcal{U}_2 \cap \mathring{\mathcal{U}}_1 \neq \emptyset$ (da $\mathcal{U}_2$ offen) $\Rightarrow$ Z. ■

<u>Bemerkung 1</u>: gleiche Beweis funktioniert mit "γ <u>Integrationsweg</u>" ersetzt durch "γ <u>weg</u>" überall.

D.h. U zhngd $\Leftrightarrow$ U weg zhngd.

<u>Bemerkung 2</u>: Für allgemeine topologische Räume gilt U weg zhngd. $\Rightarrow$ U zhngd,

aber U zhngd. $\not\Rightarrow$ U weg zhngd.

(es existieren Beispiele mit U zhngd. aber U nicht weg zhngd.)

Defin. 7.1: Sei U offen. Dann ist

$$U = \bigcup_{p \in U} U_p \quad , \text{ wobei}$$

$$U_p := \left\{ x \in U \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists \text{ Weg } \gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mit} \\ \gamma([a,b]) \subseteq U,\ \gamma(a) = p,\ \gamma(b) = x \end{array} \right\}$$

Es gilt i) U_p offen

ii) $\forall p, q \in U$ ist $U_p = U_q$ oder $U_p \cap U_q = \emptyset$.

Die Mengen U_p heißen die wegzusammenhängende (zusammenhängende) Komponenten von U.

schreibe $p \sim q$ falls $U_p = U_q$.

$U_{[p]} := U_p$ ist wohldefiniert, wobei

$$[p] = \{ q \mid U_q = U_p \}.$$

Korollar 7.17 (zu Propn. 7.14 und Propn 7.10):

Sei U offen, U zhngd., und

$f: U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $f'(z)=0 \ \forall z \in U$.

Dann ist $f: U \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = c \ \forall z \in U$.

D.h. $f \equiv c$. Wir sagen "f ist konstant".

Beweis: Seien $p, q \in U$ und $\gamma: [a,b] \to U \subseteq \mathbb{C}$, ein Int. weg mit $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$. Dann gilt nach Propn. 7.10:

$$0 = \int_\gamma \overset{=0}{f'(z)}\, dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)). \quad \blacksquare$$

Def. 7.18: Sei U offen, $f: U \longrightarrow \mathbb{C}$. Eine Funktion $F: U \longrightarrow \mathbb{C}$ ist eine "Stammfunktion für f", falls $F: U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist mit $F' = f$.

Propn 7.19 (über Stammfunktionen). Sei U offen, $f: U \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig. f besitzt eine Stamm Funktion $F: U \longrightarrow \mathbb{C} \iff \int_\gamma f(z)\, dz = 0 \ \forall$ geschlossene Integrationswege $\gamma: [a,b] \longrightarrow U$ (geschl $\Leftrightarrow \gamma(a) = \gamma(b)$)

Beweis: $(\Rightarrow)$: Folgt von Korollar 7.11:
$F: U \longrightarrow \mathbb{C}$ ist eine Stammfn. für $f: U \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\Rightarrow 0 \overset{(\text{Kor } 7.11)}{=} \int_\gamma F'(z)\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz \quad \forall \text{ geschlossene}$$

Integrationswege $\gamma: [a,b] \longrightarrow U \subseteq \mathbb{C}$.

($\Leftarrow$): Auf $\mathcal{U}_{[P]} = \mathcal{U}_P$ definiere

$F: \mathcal{U}_P \to \mathbb{C}$ durch

$$F(w) := \int_{\gamma_w} f(z)\,dz, \quad \text{wobei}$$

$\gamma_w: [a,b] \to \mathcal{U}_P$ ~~seine~~ eine beliebige Integrationsweg mit $\gamma_w(a) = P$, $\gamma_w(b) = w$ ist.

Falls $\tilde{\gamma}_w: [c,d] \to \mathcal{U}_P$ eine andere Int. Weg mit $\tilde{\gamma}_w(c) = P$, $\tilde{\gamma}_w(d) = w$ ist,

dann gilt:

$$\int_{\gamma_w} f(z)\,dz - \int_{\tilde{\gamma}_w} f(z)\,dz$$

$$= \int_{\gamma_w} f(z)\,dz + \int_{\hat{\gamma}_w} f(z)\,dz,$$

wobei $\hat{\gamma}_w = \tilde{\gamma}_w \circ \phi$, $\quad \phi : [c,d] \to [c,d]$

ist $\phi(t) := c - t + d$

($\phi(c) = d$, $\phi(d) = c$)

(wegen Propn. 7.9 ii) orientierungsumkehrende Umparametrisierungen).

$$= \int_{\gamma_w \cup \hat{\gamma}_w} f(z)\,dz$$

$= 0$ wegen den Voraussetzungen. ■

$F: U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph: sei σ Weg von w nach $w+th$ (linie)

$$\frac{F(w+h) - F(w)}{h} = \frac{\cancel{\int_\gamma f(z)\,dz} + \int_\sigma f(z)\,dz - \cancel{\int_\gamma f(z)\,dz}}{h}$$

$$= \int_0^1 \frac{\cancel{h} f(w+th)}{\cancel{h}}\,dt \xrightarrow{h \to 0} f(w)$$

$\Rightarrow \quad F'(w) = f(w)$. Da $U = \bigcup_{[\rho]} U_{[\rho]}$ ist, können wir $F: U \to \mathbb{C}$ definieren (wohldefiniert und holomorph) ■