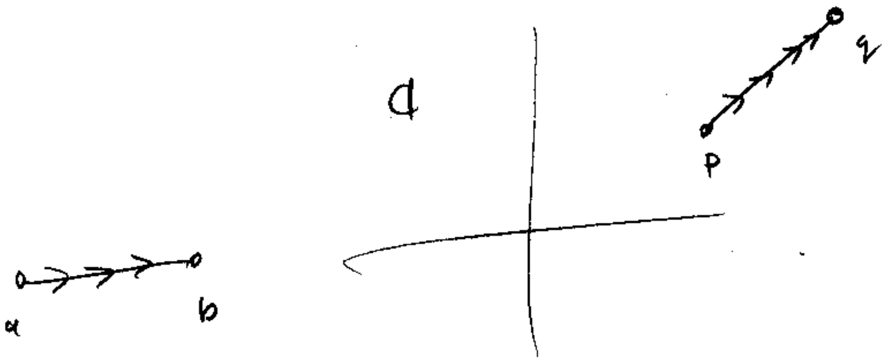
<u>Definition 7.1</u>[20]: Seien $p, q \in \mathbb{C}$. Eine "<u>gut-parametrisierte Linie</u>" oder "<u>g-p-Linie</u>" ist ein Weg $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ mit

$$\gamma(t) := p\left(\frac{b-t}{b-a}\right) + q\left(\frac{t-a}{b-a}\right)$$



Es gilt $\gamma'(t) = \dfrac{q-p}{b-a} \Rightarrow |\gamma'(t)| = \dfrac{|q-p|}{(b-a)}$ ist konstant $\forall t \in [a,b]$. Wir sagen: "γ hat konstante Geschwindigkeit".

Für zwei g-p-Linien σ, γ von p nach q gilt:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\sigma f(z)dz \qquad (7.1)$$

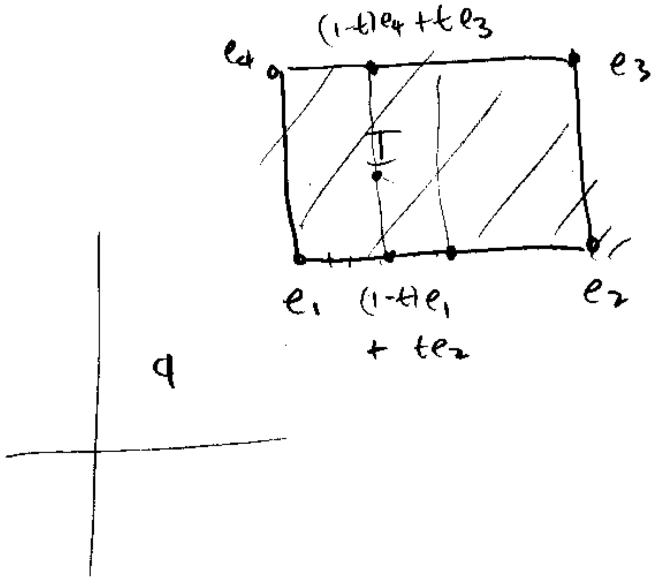
(folgt von Propn 7.4 wieder). Ist γ eine g-p-Linie von p nach q und σ eine g-p-Linie von q nach p, dann gilt:

$$\int_{\gamma\cup\sigma} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz + \int_\sigma f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz - \int_\gamma f(z)dz = 0$$

wegen Propn. 7.9 wieder).

Defn. 7.2

Sei $I \subseteq \mathbb{C}$ ein Rechteck: mit Rechtecken meinen wir geschlossene Achsen parallele (zu reelen und imaginären Achsen) Rechtecken. Die werden durch vier Ecken definiert; $e_1 =$ linksunten Ecke, $e_2 =$ Rechtsunten Ecke, $e_3 =$ rechtsoben Ecke, $e_4 =$ linksoben Ecke.



$$I := \{ ((1-t)e_1 + te_2)(1-s) + s((1-t)e_4 + te_3) \mid t, s \in [0,1]. \}$$

Für $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ beliebig in $\mathbb{C}$ mit

$Im(e_1) = Im(e_2)$, $Re(e_1) = Re(e_4)$,
$Im(e_4) = Im(e_3)$, $Re(e_2) = Re(e_3)$ und
, $e_i \neq e_j$ $\forall i, j \in \{1, \dots, 4\}$, $Re(e_1) < Re(e_2)$
$Im(e_1) < Im(e_4)$

bekommen wir ein Rechteck I wie oben definiert.

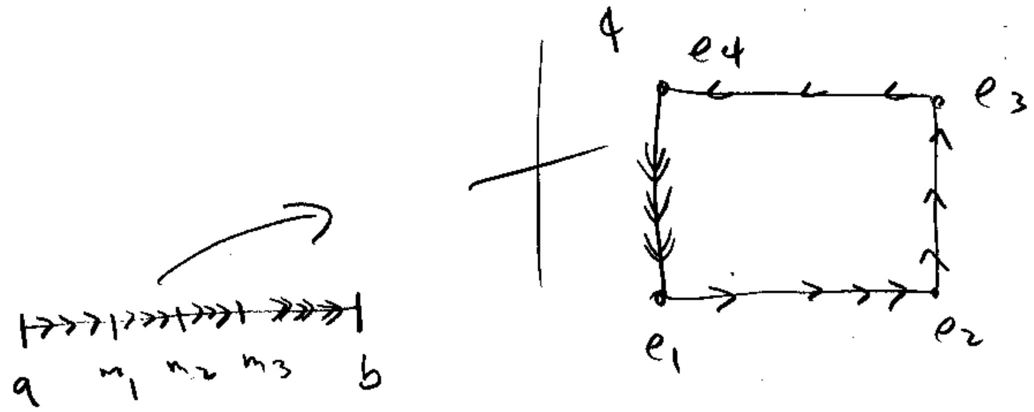
Ein positiv orientierter Rechteckweg $\gamma : I[a,b] \to \partial I$, I durch e_1, e_2, e_3, e_4 (wie oben) gegeben, ist ein weg mit $[a,b] = [a,m_1] \cup [m_1, m_2] \cup [m_2,m_3] \cup [m_3,b]$

so dass $\gamma|_{[a,m_1]}$ ist eine g-p. Linie von e_1 nach e_2,

$\gamma|_{[m_1, m_2]}$ " " e_2 nach e_3,

$\gamma|_{[m_2, m_3]}$ " " e_3 nach e_4

$\gamma|_{[m_3, b]}$ " " e_4 nach e_1



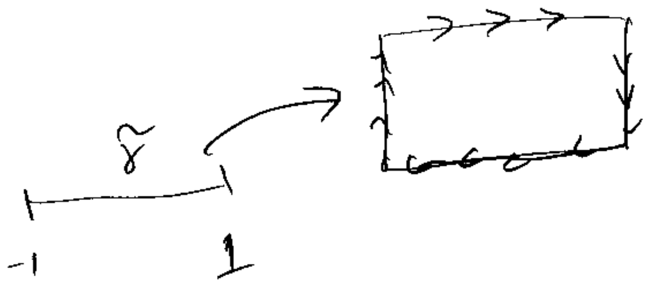
Achtung: dieser Weg hat eine Orientierung

Es läuft gegen den Uhrzeigersinn.

Falls $\gamma : [-1,1] \to \partial I$ (so eine Kurve ist),

dann geht $\tilde{\gamma} : [-1,1] \to \partial I$,

$\tilde{\gamma}(t) := \gamma(-t)$ in der andere Richtung:



So eine Kurve nennen wir ein negativ orientierter Rechteckweg.

Sei $f: \partial I \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig, γ, $\tilde{\gamma}$ wie oben.
Dann gilt:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = -\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,dz.$$

Notation 7.22 mit $\int_{\partial I} f(z)\,dz$ meinen wir

$\int_\gamma f(z)\,dz$ wobei γ ein +ve orientierte Rechtseckweg ist (hängt nicht von der Wahl von welche γ wir nehmen, wegen (7.1)).

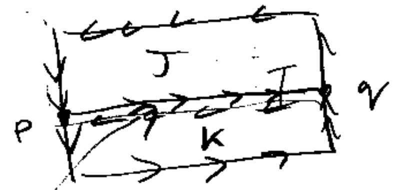
Lemma 7.23 Sei I, J, K Rechtecken mit

$I = J \cup K$, $\mathring{J} \cap \mathring{K} = \emptyset$.

Sei $f: I \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt:

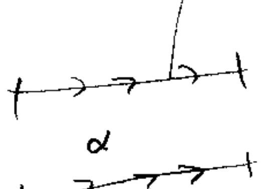
$$\int_{\partial I} f(z)dz = \int_{\partial J} f(z)dz + \int_{\partial K} f(z)dz.$$

Beweis: Falls es so aussieht



dann ist $\int_{\partial I} f(z)dz = \int_{\partial I} f(z)dz + \int_{\alpha} f(z)dz$

$- \int_{\alpha} f(z)dz$



wobei α eine g.p. Linie von p nach q ist.

$$= \int_{\partial I} f(z)dz + \int_{\alpha} f(z)dz + \int_{\tilde{\alpha}} f(z)dz$$

wobei $\tilde{\alpha}$ eine g.p. Linie von q nach p ist

$\Rightarrow \int_I f(z)\, dz =$

$$= \int_{\partial K} f(z)\,dz + \int_{\partial J} f(z)\,dz$$

von dem Lemma vorher ist

$$\int_{\partial I_0} f(z)\,dz = \int_{\partial I_{0,1}} f(z)\,dz + \int_{\partial I_{0,2}} f(z)\,dz + \int_{\partial I_{0,3}} f(z)\,dz + \int_{\partial I_{0,4}} f(z)\,dz$$

und dadurch

$$\left|\int_{\partial I_0} f(z)\,dz\right| \le \left|\int_{\partial I_{0,1}} f(z)\,dz\right| + \left|\int_{\partial I_{0,2}} f(z)\,dz\right| + \left|\int_{\partial I_{0,3}} f(z)\,dz\right|$$

$$+ \left|\int_{\partial I_{0,4}} f(z)\,dz\right| .$$

$$\le 4 \max_{i\in\{1,2,3,4\}} \left|\int_{\partial I_{0,i}} f(z)\,dz\right| = 4\left|\int_{\partial I_{0,j}} f(z)\,dz\right|$$

für ein $j \in \{1,2,3,4\}$. Definiere $I_1 := I_{0,j}$ für dieses j.

<u>Schritt 2</u>: wir machen auch so eine Unterteilung von I_1 in $I_{1,1} \cup I_{1,2} \cup I_{1,3} \cup I_{1,4}$

$$\Rightarrow \left|\int_{\partial I_1} f(z)\,dz\right| \le 4\left|\int_{\partial I_{1,j}} f(z)\,dz\right| \text{ für ein } j\in\{1,2,3,4\}$$

$$= 4\left|\int_{\partial I_2} f(z)\,dz\right| \text{ für } I_2 := I_{1,j}.$$

$$\Rightarrow \left|\int_{\partial I_0} f(z)\,dz\right| \le 4\left|\int_{\partial I_1} f(z)\,dz\right| \le 4^2\left|\int_{\partial I_2} f(z)\,dz\right| .$$

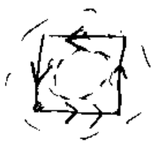
(Cauchy integral Satz für Rechtecken)

Satz 7.2 4

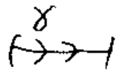
Sei $f: M \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Es gilt:

$\int_\gamma f(z)dz = 0 \quad \forall$ Rechteckwege $\gamma: [a,b] \to M \subseteq \mathbb{C}$, mit $I \subseteq M$, wobei I die zu γ zugehörige Rechteck ist.

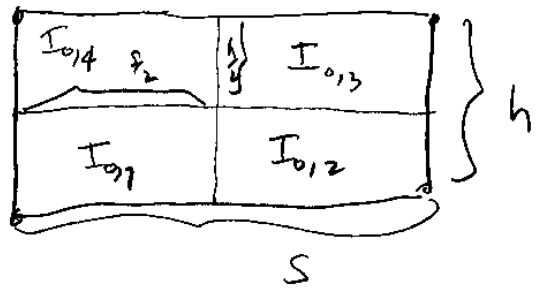
Achtung: Wir fordern nicht nur $\gamma([a,b]) \subseteq M$, sondern $I \subseteq M$.



M. Hier ist $\gamma([a,b]) \subseteq M$ aber I nicht. D.h. der Satz ist NICHT in dieser Situation anwendbar!



Beweis: Schritt 1: Sei $\gamma: [a,b] \longrightarrow M$ ein R.eck.weg mit Recht.eck $I_0 \subseteq M$. Sei s die Breite, h die Höhe von diesem Rechteck. Unterteile I_0 in vier Rechtecken $I_{0,1}, I_{0,2}, I_{0,3}, I_{0,4}$ der Breite $\frac{s}{2}$ und Höhe $\frac{h}{2}$.



Dieses Verfahren setzen wir fort, und bekommen

$$I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots,$$

mit Breite $(I_i) = \left(\frac{s}{2^i}\right) \xrightarrow{i\to\infty} 0$ und Höhe $(I_i) = \left(\frac{h}{2^i}\right) \xrightarrow{i\to\infty} 0$

$$\Rightarrow \quad \bigcap_{i=0}^{\infty} I_i = \{p\} \quad (\text{nun schrumpft } I_i \xrightarrow{i\to\infty} \{p\})$$

(Intervallschachtlungprinzip: $I_i = [a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$ mit $[a_i, b_i] \supseteq [a_{i+1}, b_{i+1}] \supseteq \cdots$ und $|b_i - a_i| \xrightarrow{i\to\infty} 0$
$[c_i, d_i] \supseteq [c_{i+1}, d_{i+1}] \supseteq \cdots$ $|d_i - c_i| \xrightarrow{i\to\infty} 0$)

weiterhin gilt in nten Schritt:

$$\left|\int_{\partial I_0} f(z)\,dz\right| \leq 4^n \left|\int_{\partial I_n} f(z)\,dz\right|$$

$$= (2)^{2n} \left|\int_{\partial I_n} f(z)\,dz\right|. \quad (*)$$

f ist holomorph $\Rightarrow$ für $|z-p| \leq \delta$ klein genug (so dass, $z \in U$) gilt:

$$f(z) = f(p) + (z-p)\cdot f'(p) + (z-p)\cdot \varepsilon_p(z-p))$$

wobei $\varepsilon_p : B_\delta(p) \to \mathbb{C}$ stetig ist,

mit $\varepsilon_p(0) = 0$: $\varepsilon_p(h) := \begin{cases} \dfrac{f(p+h) - f(p)}{h} - f'(p) & h \neq 0 \\ 0 & h = 0 \end{cases}$

Damit gilt:

$$\left|\int_{\partial I_n} f(z)\,dz\right| = \left|\int_{\partial I_n}\Big(\underbrace{f(p) + (z-p)\cdot f'(p)}_{\overset{!!}{=}\,F' \text{ wobei}} + (z-p)\cdot\varepsilon_p(z-p)\Big)dz\right|$$

$$F(z) = f(p)\cdot z + \frac{(z-p)^2}{2}\cdot f'(p) \quad . \ \partial I_n \text{ geschlossen}$$

$$\Rightarrow \int_{\partial I_n} F' = 0$$

$$\Rightarrow \left|\int_{\partial I_n} f(z)\,dz\right| = \left|\int_{\partial I_n}(z-p)\cdot\varepsilon_p(z-p)\,dz\right|$$

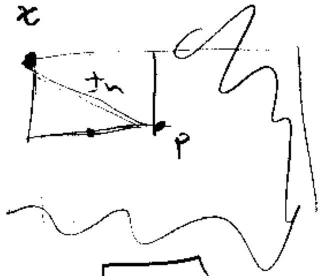
$$\leq \sup_{z\in\partial I_n}\Big(|z-p|\cdot|\varepsilon_p(z-p)|\Big)\cdot L(\partial I_n)$$

$$= \quad \overset{\shortparallel}{} \qquad \shortparallel \cdot 2\cdot\text{breite} + 2\cdot\text{höhe}$$

$$= \sup_{z\in\partial I_n}\Big(|z-p|\cdot|\varepsilon_p(z-p)|\Big)\cdot 2\left(\frac{s}{2^n}+\frac{h}{2^n}\right).$$

$p\in I_n,\ z\in\partial I_n$

$\Rightarrow |z-p|$



$$\leq 2\left(\frac{s}{2^n}+\frac{h}{2^n}\right)^2\cdot \sup_{z\in\partial I_n}|\varepsilon_p(z-p)|$$

wobei wir $c = \sqrt{a^2+b^2} \leq (a+b)$ benutzt haben.

$I_n \xrightarrow{n\to\infty} \{p\} \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\ N\in\mathbb{N}$, so dass

$|\varepsilon_p(z-p)| \leq \varepsilon \quad \forall\ n\geq N\ \forall z\in I_n.$

$$\leq 2 \frac{(s+h)^2}{2^{2n}} \cdot \varepsilon \cdot \forall \quad n \geq N .$$

Dies mit $(*)$ impliziert:

$$\left| \int_{\partial I_0} f(z)\, dz \right| \leq \frac{\cancel{(2)}^{\cancel{2n}} \cdot 2(s+n)^2}{\cancel{2}^{2n}} \cdot \varepsilon$$

ε beliebig $\Longrightarrow \left| \int_{\partial I_0} f(z)\, dz \right| = 0 .$