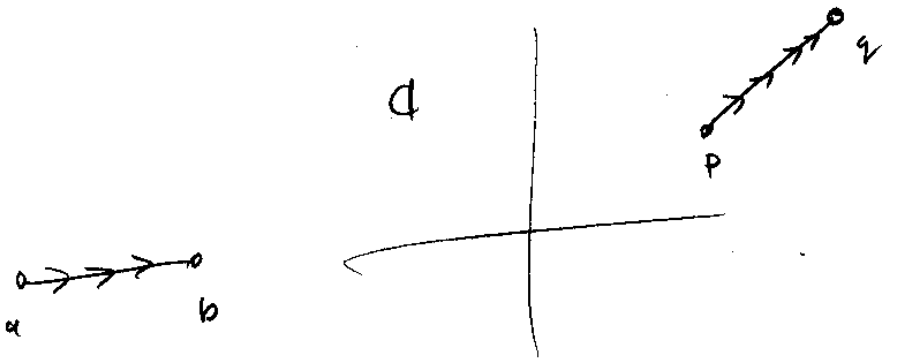
Definition 7.1[20]: Seien $p, q \in \mathbb{C}$. Eine "gut-parametrisierte Linie" oder "g-p-Linie" ist ein Weg $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ mit

$$\gamma(t) := p\left(\frac{b-t}{b-a}\right) + q\left(\frac{t-a}{b-a}\right)$$



Es gilt $\gamma'(t) = \dfrac{q-p}{b-a} \Rightarrow |\gamma'(t)| = \dfrac{|q-p|}{(b-a)}$

ist konstant $\forall\, t \in [a,b]$. Wir sagen: "γ hat konstante Geschwindigkeit".

Für zwei g-p-Linien σ, γ von p nach q gilt:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\sigma f(z)\,dz \qquad (7.1)$$

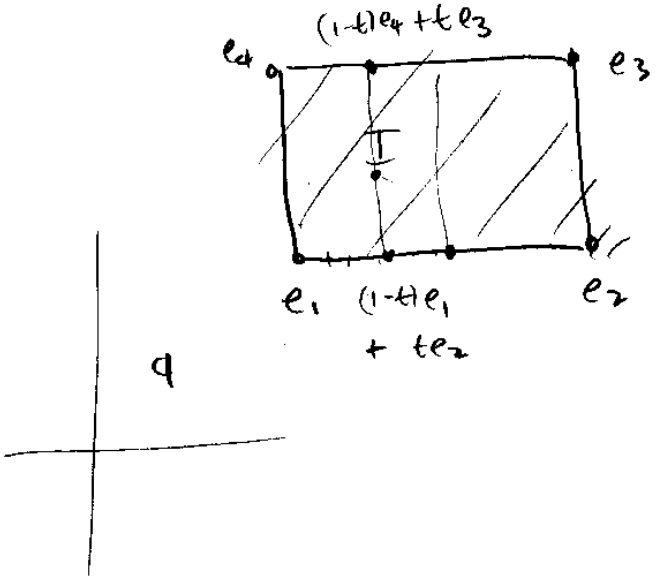
(folgt von Prop 7.9 wieder). Ist γ eine g-p-Linie von p nach q und σ eine g-p-Linie von q nach p, dann gilt:

$$\int_{\gamma\cup\sigma} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz + \int_\sigma f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz - \int_\gamma f(z)\,dz$$
$$= 0$$

wegen propn. 7.9 wieder).

Defn. 7.2 |

Sei $I \subseteq \mathbb{C}$ ein Rechteck: mit Rechtecken meinen wir geschlossene Achsen parallele (zu reellen und imaginären Achsen) Rechtecken. Die werden durch vier Ecken definiert i e_1 = linksunten Ecke, e_2 = Rechtsunten Ecke, e_3 = rechtsoben Ecke, e_4 = linksoben Ecke.



$$I := \{ s((1-t)e_1 + te_2)(1-s) + s((1-t)e_4 + te_3) \mid t, s \in [0,1] \}.$$

Für $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ beliebig in $\mathbb{C}$ mit

$\mathrm{Im}(e_1) = \mathrm{Im}(e_2)$, $\mathrm{Re}(e_1) = \mathrm{Re}(e_4)$,
$\mathrm{Im}(e_4) = \mathrm{Im}(e_3)$, $\mathrm{Re}(e_2) = \mathrm{Re}(e_3)$ und
$e_i \neq e_j \quad \forall\, i,j \in \{1,\dots,4\}$, $\mathrm{Re}(e_1) < \mathrm{Re}(e_2)$
$\mathrm{Im}(e_4) < \mathrm{Im}(e_4)$

bekommen wir ein Rechteck I wie oben definiert.

Ein positiv orientierter

Rechteckweg $\gamma: [a,b] \to \partial I$) I durch e_1, e_2, e_3, e_4 (wie oben) gegeben, ist

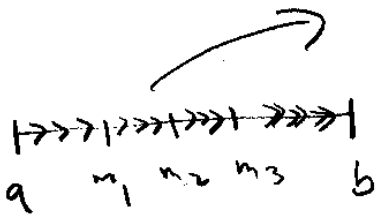
ein weg mit $[a,b] = [a,m_1] \vee [m_1,m_2] \vee [m_2,m_3] \vee [m_3,b]$

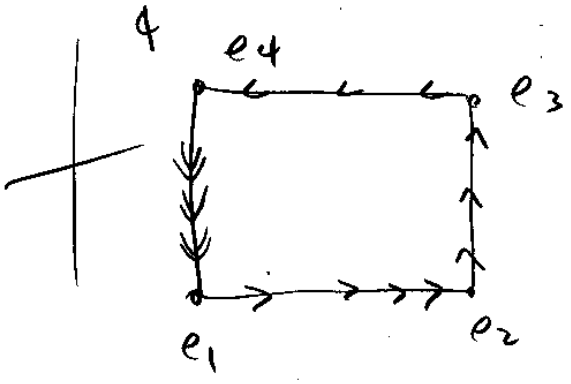
so dass $\gamma|_{[a,m_1]}$ ist eine g-p. Linie von e_1 nach e_2,

$\gamma|_{[m_1,m_2]}$ " " " e_2 nach e_3,

$\gamma|_{[m_2,m_3]}$ " " " e_3 nach e_4

$\gamma|_{[m_3,b]}$ " " " e_4 nach e_1





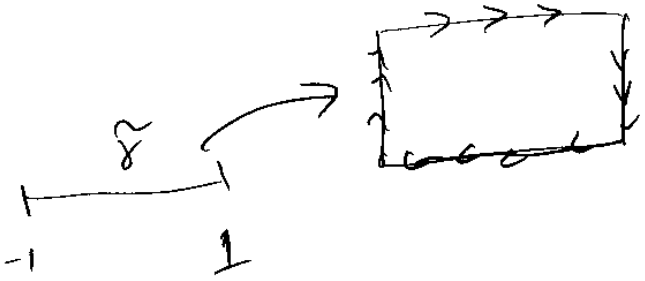
Achtung: dieser Weg hat eine Orientierung

Es läuft gegen den Uhrzeigersinn.

falls $\gamma : [-1, 1] \longrightarrow \partial I$ (so eine Kurve ist),

dann geht $\tilde{\gamma} : [-1, 1] \longrightarrow \partial I$,

$\tilde{\gamma}(t) := \gamma(-t)$ in der andere Richtung:



So eine Kurve nennen wir ein negativ orientierter Rechteckweg.

Sei $f: \partial I \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig, γ, $\tilde{\gamma}$ wie oben.
Dann gilt:

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = -\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,dz.$$

Notation 7.22 mit $\int_{\partial I} f(z)\,dz$ meinen wir

$\int_{\gamma} f(z)\,dz$ wobei γ ein true orientierte Rechtsecksweg ist (hängt nicht von der Wahl von welche γ wir nehmen, wegen (7.1)).

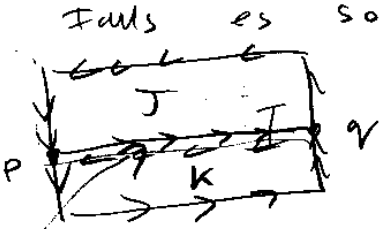
Lemma 7.23 Sei I, J, K Rechtecke mit

$$I = J \cup K \quad , \quad \mathring{J} \cap \mathring{K} = \emptyset .$$

Sei $f: I \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt:

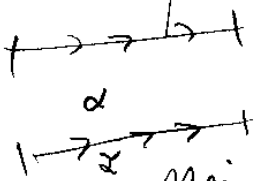
$$\int_{\partial I} f(z)\,dz = \int_{\partial J} f(z)\,dz + \int_{\partial K} f(z)\,dz .$$

Beweis:



dann ist $\int_{\partial I} f(z)\,dz = \int_{\partial I} f(z)\,dz + \int_{\alpha} f(z)\,dz$

$$= \int_{\alpha} f(z)\,dz$$



wobei α eine g.p. Linie von p nach q ist.

$$= \int_{\partial I} f(z)\,dz + \int_{\alpha} f(z)\,dz + \int_{\tilde{\alpha}} f(z)\,dz$$

wobei $\tilde{\alpha}$ eine g.p. Linie von q nach p ist

$$\Rightarrow \int_{\partial I} f(z)\,dz =$$

$$= \int_{\partial K} f(z)\,dz + \int_{\partial \bar{J}} f(z)\,dz$$

von dem Lemma vorher ist

$$\int_{\partial I_0} f(z)\,dz = \int_{\partial I_{0,1}} f(z)\,dz + \int_{\partial I_{0,2}} f(z)\,dz + \int_{\partial I_{0,3}} f(z)\,dz + \int_{\partial I_{0,4}} f(z)\,dz$$

und dadurch

$$\left|\int_{\partial I_0} f(z)\,dz\right| \le \left|\int_{\partial I_{0,1}} f(z)\,dz\right| + \left|\int_{\partial I_{0,2}} f(z)\,dz\right| + \left|\int_{\partial I_{0,3}} f(z)\,dz\right| + \left|\int_{\partial I_{0,4}} f(z)\,dz\right|.$$

$$\le 4 \max_{i\in\{1,2,3,4\}} \left|\int_{\partial I_{0,i}} f(z)\,dz\right| = 4\left|\int_{\partial I_{0,j}} f(z)\,dz\right|$$

für ein $j \in \{1,2,3,4\}$. Definiere $I_1 := I_{0,j}$ für dieses j.

<u>Schritt 2</u>: Wir machen auch so eine Unterteilung von I_1 in $I_{1,1} \cup I_{1,2} \cup I_{1,3} \cup I_{1,4}$

$$\Rightarrow \left|\int_{\partial I_1} f(z)\,dz\right| \le 4 \left|\int_{\partial I_{1,j}} f(z)\,dz\right| \text{ für ein } j\in\{1,2,3,4\}$$

$$= 4\left|\int_{\partial I_2} f(z)\,dz\right| \text{ für } I_2 := I_{1,j}.$$

$$\Rightarrow \left|\int_{\partial I_0} f(z)\,dz\right| \le 4\left|\int_{\partial I_1} f(z)\,dz\right| \le 4^2 \left|\int_{\partial I_2} f(z)\,dz\right|.$$

(Cauchy integral Satz für Rechteckwege)

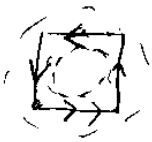
Satz 7.2.4

Sei $f: M \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Es gilt:

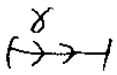
$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0 \qquad \forall \text{ Rechteckwege } \gamma: [a,b] \to M \subseteq \mathbb{C},$$

mit $I \subseteq M$, wobei I die zu γ zugehörige Rechteck ist.

Achtung: Wir fordern nicht nur $\gamma([a,b]) \subseteq M$, sondern $I \subseteq M$.

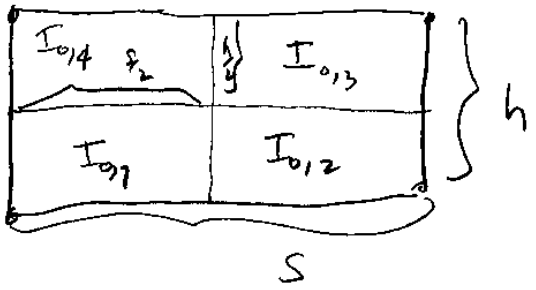


M. Hier ist $\gamma([a,b]) \subseteq M$ aber I nicht. D.h. der Satz ist NICHT in dieser Situation anwendbar!



Beweis: Schritt 1:

Sei $\gamma: [a,b] \longrightarrow M$ ein R.eck.weg mit Rechteck $I_0 \subseteq M$. Sei s die Breite, h die Höhe von diesem Rechteck. Unterteile I_0 in vier Rechtecken $I_{0,1}$, $I_{0,2}$, $I_{0,3}$, $I_{0,4}$ von der Breite $\frac{s}{2}$ und Höhe $\frac{h}{2}$.



Dieses Verfahrung setzen wir fort, und bekommen

$$I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots ,$$

mit Breite$(I_i) = \left(\frac{s}{2^i}\right) \xrightarrow{i\to\infty} 0$ und Höhe$(I_i) = \left(\frac{h}{2^i}\right) \xrightarrow{i\to\infty} 0$

$$\Rightarrow \bigcap_{i=0}^{\infty} I_i = \{p\} \quad (\text{man schrumpft } I_i \xrightarrow{i\to\infty} \{p\})$$

(Intervallschachtlung Prinzip: $I_i = [a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$
mit $[a_i,b_i] \supseteq [a_{i+1},b_{i+1}] \supseteq \dots$ und $|b_i - a_i| \xrightarrow{i\to\infty} 0$
$[c_i,d_i] \supseteq [c_{i+1},d_{i+1}] \supseteq \dots$ $|d_i - c_i| \xrightarrow{i\to\infty} 0$
weiterhin gilt in $n$ten Schritt:

$$\left|\int_{\partial I_0} f(z)\,dz\right| \le 4^n \left|\int_{\partial I_n} f(z)\,dz\right| .$$

$$= (2)^{2n} \left|\int_{\partial I_n} f(z)\,dz\right| . \quad (*)$$

f ist holomorph $\Rightarrow$ für $|z-p| \le \delta$ klein genug (so dass, $z \in \mathcal{U}$) gilt:

$$f(z) = f(p) + (z-p)\cdot f'(p) + (z-p)\cdot \varepsilon_p(z-p)$$

wobei $\varepsilon_p : B_\delta(p) \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig ist,

mit $\varepsilon_p(0) = 0$:

$$\varepsilon_p(h) := \begin{cases} \dfrac{f(p+h) - f(p)}{h} - f'(p), & h \neq 0 \\ 0, & h = 0 \end{cases}$$

Damit gilt:

$$\left| \int_{\partial I_n} f(z)\,dz \right| = \left| \int_{\partial I_n} \underbrace{\left(f(p) + (z-p)\cdot f'(p) \right)}_{:= F' \text{ wobei } F(z) = f(p)\cdot z + \frac{(z-p)^2}{2}\cdot f'(p)} + (z-p)\cdot \varepsilon_p(z-p) \right| dz$$

∂I_n geschlossen

$$\Rightarrow \int_{\partial I_n} F' = 0$$

$$\Rightarrow \left| \int_{\partial I_n} f(z)\,dz \right| = \left| \int_{\partial I_n} (z-p)\cdot \varepsilon_p(z-p)\,dz \right|$$

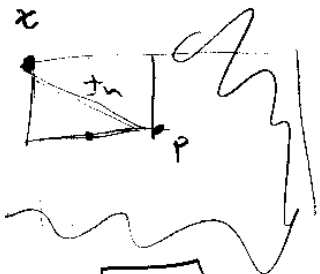
$$\leq \sup_{z \in \partial I_n} \left(|z-p| \cdot |\varepsilon_p(z-p)| \right) \cdot L(\partial I_n)$$

$$= \text{"} \qquad \text{"} = 2\cdot\text{breite} + 2\cdot\text{höhe}$$

$$= \sup_{z \in \partial I_n} \left(|z-p| \cdot |\varepsilon_p(z-p)| \right) \cdot 2\left(\frac{s}{2^n} + \frac{h}{2^n} \right).$$

$p \in I_n$, $z \in \partial I_n$

$$\Rightarrow |z-p| \leq \left(\frac{s}{2^n} + \frac{h}{2^n} \right)^2 \cdot \sup_{z \in \partial I_n} |\varepsilon_p(z-p)|$$



wobei wir $c = \sqrt{a^2+b^2}$ = (catheti) benutzt haben.

$I_n \xrightarrow{n \to \infty} \{p\} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|\varepsilon_p(z-p)| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N \; \forall z \in I_n.$$

$$\leq 2\,\frac{(s+h)^2}{2^{2n}} \cdot \varepsilon \cdot \ast \quad n \geq N.$$

Dies mit $(\ast)$ impliziert:

$$\left| \int_{\partial I_0} f(z)\,dz \right| \leq \frac{(2)^{2n} \cdot 2(s+n)^2 \cdot \varepsilon}{2^{2n}}$$

ε beliebig $\Rightarrow$ $\left| \int_{\partial I_0} f(z)\,dz \right| = 0.$