Übungsaufgaben zur Vorlesung
Funktionentheorie — SS 10, Serie 10
PD Dr. M. Simon — 30.Juni 2010
Florian Link

Aufgabe 1 *(Meromorphe Funktionen)* (4 Punkte)
Definition: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f, g : U \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ meromorph. Summe und Produkt zweier meromorpher Funktionen kann man wie folgt erklären: Sei zunächst $f \cdot g, f+g : U \backslash \{f^{-1}\{\infty\} \cup g^{-1}\{\infty\}\} \to \mathbb{C}$ wie üblich definiert. Für alle $p \in f^{-1}\{\infty\} \cup g^{-1}\{\infty\}$ derart, dass $f \cdot g$ an der Stelle p eine hebbare Singularität hat, setzen wir $f \cdot g$ auf $\big(U \backslash (f^{-1}\{\infty\} \cup g^{-1}\{\infty\})\big) \cup \{p\}$ holomorph fort. Falls $p \in f^{-1}\{\infty\} \cup g^{-1}\{\infty\}$ derart, dass p eine nicht-hebbare Singularität von $f \cdot g$ ist, dann setzt man $(f \cdot g)(p) := \infty$. Die gleiche Prozedur macht man für $f+g$.
Zeigen Sie: $f+g : U \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und $f \cdot g : U \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sind meromorph. Beweisen Sie außerdem, unter der zusätzlichen Voraussetzung dass U zusammenhängend ist, dass

$$K_U := \{f | \; f : U \to \mathbb{C} \text{ ist meromorph}\}$$

mit den Verknüpfungen ‘ + ‘ und ‘ · ‘, wie oben definiert, ein Körper ist.

Aufgabe 2 *(Umlaufzahl Teil 1)* (4 Punkte)
Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \backslash \{p\}$ ein geschlossener Weg. Weisen Sie nach, dass ein $n \in \mathbb{Z}$ existiert, so dass γ frei homotop in $\mathbb{C} \backslash \{p\}$ zu $\gamma_n : [0,1] \to \mathbb{C} \backslash \{p\}, \; \gamma_n(t) := p + e^{i2\pi nt}$ ist. Hinweis: Benutzen Sie Serie 3, Aufgabe 3 (Lift).

Aufgabe 3 *(Umlaufzahl Teil 2)* (4 Punkte)
Sei γ, γ_n $(n \in \mathbb{Z})$ wie oben in Aufgabe 2. Beweisen Sie mit Hilfe von Aufgabe 2, dass

$$\big(Um(\gamma, p) = \big) \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z-p} \, dz = n.$$

Folgern Sie, dass n eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 4 *(Laurentreihe)* (4 Punkte)
Für $U \subset \mathbb{C}$ offen sei $f : U \backslash \{p\} \to \mathbb{C}$ holomorph und p eine hebbare Singularität. Für $B_\varepsilon(p) \subset U$ sei

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-p)^k$$

für alle $z \in B_\varepsilon(p) \backslash \{p\}$ die Entwicklung von $f|_{B_\varepsilon(p) \backslash \{p\}}$ in eine Laurentreihe. Zeigen Sie: $c_k = 0$ für alle $k \leq -1$. (D.h. die Laurentreihenentwicklung von $f|_{B_\varepsilon(p) \backslash \{p\}}$ stimmt mit der Potenzreihenentwicklung von $\tilde{f}|_{B_\varepsilon(p)}$ überein, wobei $\tilde{f}$ die holomorphe Fortsetzung von $f|_{B_\varepsilon(p) \backslash \{p\}}$ auf $B_\varepsilon(p)$ ist.)

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Mittwoch, 07.07.2010 bis 11:15 Uhr. Viel Spaß!