Übungsaufgaben zur Vorlesung
Funktionentheorie — SS 10, Serie 11
PD Dr. M. Simon — 07.Juli 2010
Florian Link

Aufgabe 1 *(Residuum)*
Sei $B_\varepsilon(0)\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit einem Pol der Ordnung $N \geq 1$ in 0 und $g : B_\varepsilon(0) \to \mathbb{C}$ sei holomorph. Sei weiter

$$f(z) =: \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k \qquad \text{auf } B_\varepsilon(0)\backslash\{0\}$$

die Laurententwicklung von f (um Null), und

$$g(z) =: \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \qquad \text{auf } B_\varepsilon(0)$$

die Potenzreihenentwicklung von g (um Null). Berechnen Sie $\mathrm{Res}(f \cdot g, 0)$.

Aufgabe 2 *(Residuensatz/Berechnen reeller Integrale - Teil 1)*
Berechnen Sie

$$\lim_{\rho \searrow 0} \Big(\int_{-\infty}^{-1-\rho} \frac{10x}{x^3+1} dx + \int_{-1+\rho}^{\infty} \frac{10x}{x^3+1} dx \Big)$$

mit Hilfe des Residuensatzes (vgl. Beispiel 1 der Vorlesung).

Aufgabe 3 *(Residuensatz/Berechnen reeller Integrale - Teil 2)*
Berechnen Sie

$$\lim_{\rho \searrow 0} \Big(\int_{-\infty}^{-1-\rho} \frac{10x\cos(x)}{x^3+1} dx + \int_{-1+\rho}^{\infty} \frac{10x\cos(x)}{x^3+1} dx \Big)$$

mit Hilfe des Residuensatzes (vgl. Beispiel 1 der Vorlesung).

Aufgabe 4 *(Berechnen komplexer Integrale)*
Sei $\gamma : [0,1] \to B_{\sqrt{\pi}}(0)\backslash\{0\}$ ein Weg mit $\mathrm{Um}(\gamma, 0) = 1$. Berechnen Sie

$$\int_\gamma \frac{2z}{\tan(z^2)}\, dz.$$

Hinweis: Schreiben Sie $z \mapsto \dfrac{2z}{\tan(z^2)}$ als $\dfrac{f'}{f}$ für eine geeignete Funktion f.

Die Aufgaben sind freiwillig. Viel Erfolg bei der Klausurvorbereitung!