Übungsaufgaben zur Vorlesung
Funktionentheorie — SS 10, Serie 3
PD Dr. M. Simon — 5.Mai 2010
Florian Link

Aufgabe 1 *(Logarithmusfunktionen).* (4 Punkte)
Sei $\mathrm{Log} : \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^+ =: M \to \mathbb{C}$ definiert wie in der Vorlesung und $u, v : M \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\mathrm{Log}(z) = log(z) =: u(x,y) + iv(x,y)$ für alle $z = x + iy \in M$.
Weisen Sie nach:

i) $u, v \in C^\infty(M, \mathbb{R})$

ii) u und v erfüllen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

Nach *Serie 2, Aufgabe 3* folgt somit die Holomorphie von Log auf M.

Aufgabe 2 *(Logarithmusfunktionen).* (4 Punkte)
Für $\alpha \in [0, 2\pi)$ sei $L_\alpha^+ = \{re^{i\alpha} | r \geq 0\} \subset \mathbb{C}$. Sei außerdem $R_\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch $R_\alpha(z) := e^{i\alpha} \cdot z$ die "Rotation um den Winkel α" und

$$\mathrm{Log}_{n,\alpha} : \begin{cases} \mathbb{C}\backslash L_\alpha^+ \to \mathbb{C} \\ z \longmapsto \log_n\Big((R_\alpha)^{-1}(z)\Big) + i\alpha \end{cases}.$$

Zeigen Sie:

i) $\exp\Big(\mathrm{Log}_{n,\alpha}(z)\Big) = z$ für alle $z \in \mathbb{C}\backslash L_\alpha^+$

ii) $\mathrm{Log}_{n,\alpha}(z) = \log_{n+1}(z)$ für alle $z \in M_1 := \{re^{i\beta} | r > 0, \beta \in [0, \alpha)\} \subset \mathbb{C}$ und
$\mathrm{Log}_{n,\alpha}(z) = \log_n(z)$ für alle $z \in M_2 := \{re^{i\beta} | r > 0, \beta \in [\alpha, 2\pi)\} \subset \mathbb{C}$.

Aufgabe 3 *(Lift).* (4 Punkte)
Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ von der Klasse C^k. Zeigen Sie: Es existiert ein $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\theta \in C^k\big([a,b], \mathbb{R}\big)$ mit

$$\frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|} = e^{i\theta(t)}$$

für alle $t \in [a,b]$.
Bemerkung: $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt ein *Lift* von $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$.

Aufgabe 4 *(n-te Wurzelfunktion).* (4 Punkte)
Seien $z \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}$ gegeben.

i) Geben Sie alle Lösungen $w \in \mathbb{C}$ von $w^k = z$ an!

ii) Zeigen Sie: Es existiert eine holomorphe Funktion $g : \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}$ mit

$$\big(g(z)\big)^k = z$$

für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^+$.

(bitte wenden!)

iii) Zeigen Sie: Es existiert eine stetige Funktion $\widetilde{g} : \left(\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^+\right) \cup \{0\} \to \mathbb{C}$ mit

$$\left(\widetilde{g}(z)\right)^k = z$$

für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Mittwoch, 12.05.2010 bis 11:15 Uhr direkt vor dem Vorlesungssaal.