
Aufgabe 1 (*einfach zusammenhängend*)

(4 Punkte)

- a) Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen einfach zusammenhängend sind:
 $\mathbb{C}, B_r(m) \subset \mathbb{C}, \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+$.
- b) Beweisen Sie, dass $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nicht einfach zusammenhängend ist.

Aufgabe 2 (*Äquivalenzrelation*)

(4 Punkte)

Für $U \subset \mathbb{C}$ seien $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ und $\alpha : [c, d] \rightarrow U$ Wege in U . Wir schreiben $\gamma \sim_U \alpha$, falls es eine Homotopie $h : [0, 1]^2 \rightarrow U$ gibt derart, dass $h(\cdot, 0) = \tilde{\gamma}$, $h(\cdot, 1) = \tilde{\alpha}$, $h(0, \cdot) \equiv \tilde{\gamma}(0) = \tilde{\alpha}(0)$ und $h(1, \cdot) \equiv \tilde{\gamma}(1) = \tilde{\alpha}(1)$, wobei $\tilde{\gamma}, \tilde{\alpha}$ die respektiven normierten Wege seien. Zeigen Sie, dass " $\sim_U$ " eine Äquivalenzrelation ist, d.h. dass für beliebige Wege α, β, γ in U gilt

- i) $\alpha \sim_U \alpha$ (*Reflexivität*)
- ii) $\alpha \sim_U \beta \Rightarrow \beta \sim_U \alpha$ (*Symmetrie*)
- iii) $\alpha \sim_U \beta$ und $\beta \sim_U \gamma \Rightarrow \alpha \sim_U \gamma$ (*Transitivität*)

Aufgabe 3 (*Invarianz unter Umparametrisierung/Konsistenz*)

(4 Punkte)

- a) Für $U \subset \mathbb{C}$ offen sei $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ ein Weg und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Außerdem sei $\sigma : [c, d] \rightarrow [a, b]$ mit $\sigma(c) = a$ und $\sigma(d) = b$ eine stetige Abbildung. Dann gilt

$$\int_{\gamma \circ \sigma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

- b) Sei γ, f wie in a). In der Vorlesung wurde das Wegintegral über einen stetigen Weg definiert. Weisen Sie nach, dass im Falle eines Integrationsweges diese Definition mit der zuvor gegebenen Definition für das Wegintegral über einen Integrationsweg übereinstimmt.

Aufgabe 4 (*freie Homotopie*)

(4 Punkte)

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ und $\alpha : [c, d] \rightarrow U$ Wege

(*bitte wenden!*)

derart, dass γ frei homotop zu α in U ist, d.h. $\gamma \approx_U \alpha$. Zeigen Sie:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\alpha} f(z)dz.$$

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Mittwoch, 02.06.2010 bis 11:15 Uhr.