Übungsaufgaben zur Vorlesung
Funktionentheorie — SS 10, Serie 6
PD Dr. M. Simon — 02.Juni 2010
Florian Link

Aufgabe 1 *(Schwarzsches Spiegelungsprinzip)* (4 Punkte)
Für $\widetilde{V} \subseteq \mathbb{C}$ offen und $V := \widetilde{V} \cap \{z \in \mathbb{C} |\ \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ sei $U := V \cup \bar{V}$, wobei hier $\bar{V} := \{\, \bar{z} \,|\ z \in V\}$ (nicht den topologischen Abschluss bezeichnet).

i) Zeigen Sie, dass U und $V \backslash \mathbb{R}$ offene Mengen in $\mathbb{C}$ sind.

ii) Sei $f : V \to \mathbb{C}$ stetig, $f|_{V\backslash\mathbb{R}}$ holomorph, und $f|_{V\cap\mathbb{R}}(z) \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ für alle $z \in V \cap \mathbb{R}$. Sei außerdem $g : U \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$g(z) := \begin{cases} f(z), & \text{falls } z \in V \\ \overline{f(\bar{z})}, & \text{falls } z \in \bar{V} \end{cases} .$$

Zeigen Sie: $g : U \to \mathbb{C}$ ist wohldefiniert und holomorph.Hinweis: Korollar 9.9.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen,

$$f : \begin{cases} U \times [a, b] \to \mathbb{C} \\ (z, t) \mapsto f(z, t) \end{cases}$$

stetig und $f(\,\cdot\,, t) : U \to \mathbb{C}$ holomorph für alle $t \in [a, b]$. Beweisen Sie: $F : U \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$F(z) := \int_a^b f(z, t)\, dt$$

ist holomorph. Hinweis: Satz von Morera

Aufgabe 3 *(logarithmische Reihe)* (4 Punkte)
Sei $\widetilde{\log} : \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^- \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\widetilde{\log}(z) = \log(|z|) + i \arg(e^{-i\pi} z) - i\pi$$

(d.h. $\widetilde{\log} = \log_{0,\pi}$).

i) Zeigen Sie: $f : B_1(0) \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definiert durch $f(z) := \widetilde{\log}(1 + z)$, besitzt die Potenzreihenentwicklung $f(z) = z - \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^3}{3} - \dfrac{z^4}{4} + \ldots = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \dfrac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} z^\nu$.
Bemerkung: $\widetilde{\log}$ wird manchmal *Hauptzweig des Logarithmus* genannt.

ii) Was ist der Konvergenzradius der Reihe $z - \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^3}{3} - \dfrac{z^4}{4} + \ldots$? (mit Nachweis!)

(bitte wenden!)

Bonusaufgabe *(zur logarithmischen Reihe)* (4 Zusatzpunkte)

i) Sei a_ν eine reelle, monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert die Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ gleichmäßig auf jedem Kompaktum $K \subset \overline{B_1(0)} \backslash \{1\} \subset \mathbb{C}$.

ii) Die logarithmische Reihe $z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots$ konvergiert gleichmäßig auf jedem Kompaktum $K \subset \overline{B_1(0)} \backslash \{-1\}$ (d.h. konvergiert kompakt in $\overline{B_1(0)} \backslash \{-1\}$.)

Hinweis zu Teil i): Betrachten Sie zunächst die Reihe $(1-z) \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Für $U \subseteq \mathbb{C}$ offen sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $B_R(p) \subseteq U$. Zeigen Sie:

$$|f^{(n)}(p)| \leq \frac{n!}{R^n} \sup_{|z-p|=R} |f(z)|.$$

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Mittwoch, 09.06.2010 bis 11:15 Uhr.