

Aufgabe 1 (*Potenzreihen*)

(4 Punkte)

Seien $\alpha, z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Für $k \in \mathbb{N}$ ist

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1)}{k(k-1) \cdot \dots \cdot 1} \quad \text{und} \quad \binom{\alpha}{0} := 1.$$

Zeigen Sie:

$$(1+z)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k,$$

wobei $(1+z)^\alpha := \exp(\alpha \widetilde{\log}(z+1))$ und $\widetilde{\log} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^- \rightarrow \mathbb{C}$ der Hauptzweig des Logarithmus ist (siehe Serie 6, Aufgabe 3).

Aufgabe 2 (*Potenzreihen*)

(4 Punkte)

Für $U, V \subset \mathbb{C}$ offen seien $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $f(U) \subset V$. Für $\varepsilon > 0$ und $z, w \in B_\varepsilon(0)$ seien

$$f(p+z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \quad \text{und} \quad g(f(p)+w) = \sum_{\mu=0}^{\infty} b_\mu w^\mu$$

Taylorentwicklungen von f um p bzw. von g um $f(p)$. Sei $g(f(p)+z) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda z^\lambda$ für alle $z \in B_\varepsilon(0)$. Bestimmen Sie $\{c_\lambda\}_{\lambda=0}^{\infty}$ mittels $\{a_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ und $\{b_\mu\}_{\mu=0}^{\infty}$ (mit Nachweis!). Hinweise: Man kann ohne Einschränkung annehmen, dass $p=f(p)=0$. Umordnungssatz für Doppelreihen.

Aufgabe 3

(4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion und $g, h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe Fortsetzungen von f , d.h. g und h sind holomorph und es gilt $g|_{\mathbb{R}} = h|_{\mathbb{R}} = f$. Zeigen Sie: $h \equiv g$.

Aufgabe 4

(4 Punkte)

Für $U \subset \mathbb{C}$ offen sei $f : U \rightarrow V \subset \mathbb{C}$ bijektiv und holomorph. Man zeige: V ist offen und $f^{-1} : V \rightarrow U$ ist holomorph.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Mittwoch, 16.06.2010 bis 11:15 Uhr. Viel Spaß!