

Aufgabe 1 (*Maximumprinzip für Sub-/Superharmonische Funktionen*) (4 Punkte)
Für $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ sei $u \in C^0(\overline{B_R(0)}) \cap C^2(B_R(0))$ subharmonisch (superharmonisch) auf $B_R(0)$, d.h.

$$\Delta u \underset{(\geq)}{\overset{\leq}{\geq}} 0 \quad \text{auf } B_R(0).$$

Man zeige:

$$\sup_{B_R(0)} u = \sup_{\partial B_R(0)} u \\ (\text{bzw. } \inf_{B_R(0)} u = \inf_{\partial B_R(0)} u).$$

Hinweis: Untersuchen Sie $v_\varepsilon(x) := u(x) + \varepsilon|x|^2$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{z \in \mathbb{C} \setminus B_R(0)} \operatorname{Re}(f(z)) = 0.$$

Zeigen Sie: $f \equiv \text{const.}$ Hinweis: $\operatorname{Re}(f)$ ist harmonisch. Verwenden Sie Aufgabe 1.

Aufgabe 3 (*1.Schritt für Aufgabe 4*) (4 Punkte)
Sei $u : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(z) := \log(|1+z|),$$

wobei $\log : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ der reelle Logarithmus ist. Zeigen Sie:

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{-\pi+\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} u(e^{it}) dt = 0.$$

Hinweis: Untersuchen Sie das Wegintegral der auf $U := \mathbb{C} \setminus \{-1, 0\}$ holomorphen Funktion $z^{-1}u(z)$ über einen geeigneten in U zusammenziehbaren Weg und verwenden Sie dann den Cauchy'schen Integralsatz.

Aufgabe 4 (*Berechnung reeller Integrale mit funktionenth. Hilfsmitteln*) (4 Punkte)
Berechnen Sie

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \log(\sin(t)) dt.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $|1+e^{it}| = |2\cos(t/2)|$ und verwenden Sie dann Aufgabe 3.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Mittwoch, 23.06.2010 bis 11:15 Uhr. Viel Spaß!