Übungsaufgaben zur Vorlesung
Funktionentheorie — SS 10, Serie 9
PD Dr. M. Simon — 23.Juni 2010
Florian Link

Aufgabe 1 *(Dirichlet-Problem)* (4 Punkte)
Zeigen Sie: Es existiert eine Funktion $u : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u \in C^\infty(B_1(0), \mathbb{R})$ mit $\Delta u = 0$ auf $B_1(0)$ und $\sup_{B_1(0)}|u| < \infty$, welche keine harmonische Fortsetzung besitzt. Dabei nennt man $v : B_{1+\varepsilon}(0) \to \mathbb{R}$ eine harmonische Fortsetzung von u, falls $v|_{B_1(0)} \equiv u$ und $v : B_{1+\varepsilon}(0) \to \mathbb{R}$ harmonisch ist. Hinweis: Lösung eines Dirichlet-Problems.

Aufgabe 2 *(Dirichlet-Problem)* (4 Punkte)
Sei $\phi \in C^0(\partial B_1^2(0), \mathbb{R})$. Weisen Sie die Existenz einer Funktion $u : \mathbb{C}\backslash B_1(0) \to \mathbb{R}$ mit $u \in C^\infty(\mathbb{C}\backslash\overline{B_1(0)}, \mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{C}\backslash B_1(0), \mathbb{R})$ nach, so dass diese

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{auf } \mathbb{C}\backslash\overline{B_1(0)} \\ u = \phi & \text{auf } \partial B_1(0) \end{cases}$$

erfüllt! Hinweis: Dirichlet-Problem.

Aufgabe 3 *(Hebbare Singularitäten)* (4 Punkte)
Sei $f : \mathbb{C}\backslash\overline{B_1(0)} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $\sup\limits_{\mathbb{C}\backslash\overline{B_1(0)}} |f| < \infty$. Sei $g : B_1(0)\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ definiert durch $g(z) := f(1/z)$. Weisen Sie nach: g hat eine hebbare Singularität in 0.

Bonusaufgabe*(Hebbare Singularitäten/Satz von Liouville)* (4 Zusatzpunkte)
Beweisen Sie mit Hilfe von Aufgabe 3 den Satz von Liouville für eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$! Hinweis: Untersuchen Sie $|z_k|$ für eine Maximalfolge $|f(z_k)| \to \sup\limits_{\mathbb{C}}|f|$.

Aufgabe 4 *(Pole)* (4 Punkte)
Für $U \subset \mathbb{C}$ offen und $p \in U$ seien $f : U\backslash\{p\} \to \mathbb{C}$, $g : U\backslash\{p\} \to \mathbb{C}$ holomorph. p sei ein Pol der Ordnung n von f und p ein Pol der Ordnung m von g. Zeigen Sie: $f \cdot g : U\backslash\{p\} \to \mathbb{C}$ hat einen Pol der Ordnung n+m.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Mittwoch, 30.06.2010 bis 11:15 Uhr. Viel Spaß!