Übungsaufgaben zur Vorlesung
Partielle Differentialgleichungen II — SS 11, Serie 1
Prof. Dr. G.Wang — 04.Mai 2011
Florian Link

Definition *(schwache Sublösung).* Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $a^{ij} \in L^\infty(\Omega)$ mit $\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2$ für ein $\lambda > 0$, sei der schwach definierte Operator L gegeben durch

$$Lu = -\frac{\partial}{\partial x^j}\Big(a^{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x^i}u(x)\Big).$$

Dann heißt $u \in W^{1,2}(\Omega)$ schwache Sublösung von L (als Formel: $Lu \leq 0$), falls für alle $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ mit $\varphi \geq 0$ (f.ü.) gilt

$$\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a^{ij} D_i u D_j \varphi \, dx \leq 0.$$

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei u schwache Sublösung von L und $f \in C^2(\mathbb{R})$ sei konvex mit $0 \leq f' \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass dann $f \circ u$ ebenfalls eine schwache Sublösung ist!

Aufgabe 2 (4 Punkte)
$u \in W^{1,2}(\Omega)$ sei schwache Sublösung von L, d.h. $Lu \leq 0$. Beweisen Sie: Für beliebiges aber fixiertes $k \in \mathbb{R}$ ist dann

$$x \mapsto v(x) := \max(u(x), k)$$

ebenfalls eine schwache Sublösung von L.
Hinweis: Finden Sie eine Folge von Funktionen f_n mit $f_n' \geq 0$ und $f_n'' \geq 0$, so dass $f_n \to f(\,\cdot\,) := \max(\,\cdot\,, k)$ in einem geeigneten Sinne konvergiert.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei $u \in L^\infty(B_R)$ mit $u \geq 0$. Zeigen Sie:

$$\lim_{p\to\infty}\Big(\fint_{B_R} u^p dx\Big)^{1/p} = \|u\|_{L^\infty(B_R)}.$$

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Mittwoch, 11.05.2011 bis 8:15 Uhr.