Übungsaufgaben zur Vorlesung
Partielle Differentialgleichungen II — SS 11, Serie 10
Prof. Dr. G.Wang — 20.Juli 2011
Florian Link

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $Id : (M, g) \to (M, g)$ die Identische Abbildung. Zeigen Sie, dass Id harmonisch ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei Σ_1 eine Fläche (d.h. eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit) mit einer konformen Metrik $g = \sigma(z)^2 dz d\bar{z} = \sigma(x, y)^2(dx^2 + dy^2)$. Sei weiter (N, h) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $f : (\Sigma_1, g) \to (N, h)$ eine C^2−Abbildung.

a) Geben Sie einen Ausdruck sowohl für die Energie-Dichte $e(f)$ (in lokalen Koordinaten) von f an, als auch für die Energie $E(f)$.

b) Sei $f : (\Sigma_1, g) \to (N, h)$ eine harmonische Abbildung. Berechnen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung bzgl. E.

c) Sei nun (N, h) ebenfalls eine Fläche, wobei $h = \rho(z)^2 dz d\bar{z} = \rho^2(dv^2 + dw^2)$. Zeigen Sie für diesen Spezialfall die Gleichung für eine harmonische Abbildung

$$\frac{1}{\sigma^2} f^\alpha_{z\bar{z}} + \frac{1}{\sigma^2} \frac{2\rho_u}{\rho} f_z f_{\bar{z}} = 0,$$

wobei $f_z := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial v} - i\frac{\partial f}{\partial w}\right)$ und $f_{\bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial v} + i\frac{\partial f}{\partial w}\right)$ ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $B^n = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ der n-dimensionale Einheitsball. Prüfen Sie nach, dass

$$u : B^n \to S^{n-1} \quad \text{definiert durch} \quad x \mapsto \frac{x}{|x|}$$

der Gleichung

$$-\Delta u = |Du|^2 u \qquad \text{für } x \neq 0$$

genügt. D.h., dass $u : B^n \backslash \{0\} \to S^{n-1}$ eine harmonische Abbildung ist.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Mittwoch, 27.07.2011 bis 8:15 Uhr.